| الجمهورية التونسية ❀❀❀❀ وزارة التربية | امتحان شهادة ختم التعليم الأساسي العام | | |
|---|---|---|---|
| | دورة 2019 | | |
| | الاختبار: الرياضيات | ضارب الاختبار: 2 | الحصة: ساعتان |

**التمرين الأول (3 نقاط)**

يلي كل سؤال ثلاث إجابات، إحداها فقط صحيحة.
أنقل ، في كلّ مرّة، على ورقة تحريرك رقم السؤال والإجابة الصّحيحة الموافقة له.

1) العدد الذي ينتمي إلى المجال $]4, 5[$ من بين الأعداد $a=3\sqrt{3}$ و $b=|2\pi-2|$ و $c=5^{-2}\times2^{-3}\times10^{3}$ هو:

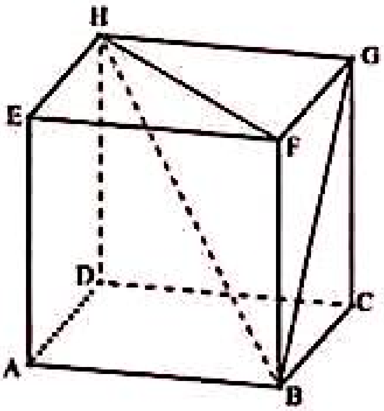
أ) a  ب) b  ج) c

2) حلّ المعادلة $\frac{3}{5}x=\frac{4}{5}(5-x)$ في IR هو:

أ) 5  ب) $-20$  ج) $\frac{20}{7}$

3) مجموعة حلول المتراجحة $\frac{2x}{1+\sqrt{3}}\le 1-\sqrt{3}$ في IR هي:

أ) $]-\infty,-1]$  ب) $]-\infty,\sqrt{3}]$  ج) $[-1,+\infty[$




4) يمثّل الشكل التالي مكعبا ABCDEFGH:
المستقيم (BF) عمودي على المستوي:

أ) (BFE)  ب) (GFA)  ج) (HFG)

**التمرين الثاني ( 3.5 نقاط)**

نعتبر العددين الحقيقيين $a=12+\sqrt{200}-\sqrt{8}$ و $b=2(6+3\sqrt{3})$

1) أ) بيّن أنّ $a=2(6+4\sqrt{2})$

ب) قارن بين $4\sqrt{2}$ و $3\sqrt{3}$ ثمّ استنتج أنّ $b<a$

2) بيّن أنّ $b=(3+\sqrt{3})^2$ و $a=(2+2\sqrt{2})^2$

3) ليكن العدد الحقيقي $c=\frac{3+\sqrt{3}}{2+2\sqrt{2}}$

أ) بيّن أنّ $c^2<1$

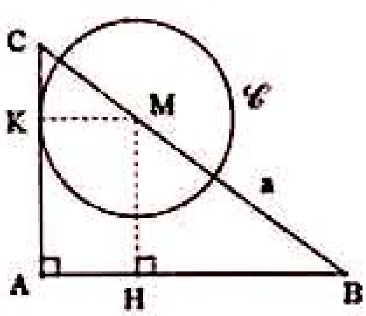
ب) بيّن أنّ $\frac{1}{2}<c<1$

**التمرين الثالث (5 نقاط)**

نعتبر العبارة $E=x^2-\frac{32}{5}x+16$ حيث x عدد حقيقي.

1) أحسب القيمة العددية للعبارة E إذا كان $x=5$

2) بيّن أنّ $E=\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2$




3) وحدة قيس الطّول هي الصنتمتر.
في الرسم المقابل لدينا:

- ABC مثلّث قائم في A حيث $AB=4$ و $AC=3$
- M نقطة من $[BC]$ و $BM=a$ حيث a عدد حقيقي ينتمي للمجال $]0, 5[$
- H المسقط العمودي للنّقطة M على $[AB]$
- $\mathscr{C}$ دائرة مركزها M و مماسّة للمستقيم (AC) في نقطة K

أ) بيّن أن $BC = 5$

ب) بيّن أن $\frac{HM}{AC} = \frac{BM}{BC}$ و استنتج أن $HM = \frac{3}{5}a$

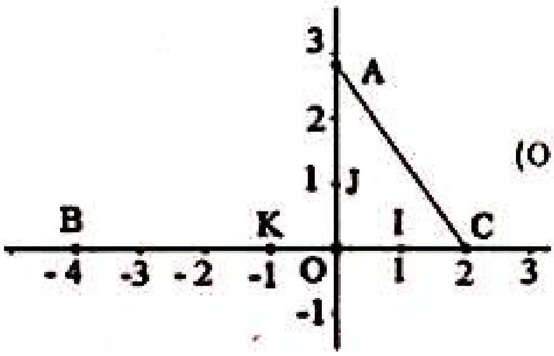
4) نعتبر المستطيل AHMK من الشكل السابق.

أ) بيّن أن $KM = \frac{4}{5}(5 - a)$

ب) استنتج أن $HK^2 = a^2 - \frac{32}{5}a + 16$

ج) أوجد العدد $a$ حيث $AM = \frac{12}{5}$

**التمرين الرابع (5 نقاط)**




وحدة قيس الطول هي السنتمتر.

في الرسم المقابل لدينا:

- $(O;I;J)$ معيّن من المستوي و $OI = OJ = 1$ و $(OI) \perp (OJ)$
- النقطة A من نصف المستقيم $[OJ)$ حيث $AC = 2\sqrt{3}$
- النقاط $B(-4;0)$ و $C(2;0)$ و $K(-1;0)$

1) أ) بيّن أن K منتصف $[BC]$

ب) أحسب OB و OC و BC.

2) أ) أحسب OA ثم استنتج أن إحداثيات النقطة A هي $(0;2\sqrt{2})$

ب) بيّن أن $AB = 2\sqrt{6}$

3) نعتبر النقطة P منتصف $[OA]$ و النقطة E مناظرة C بالنسبة إلى P

أ) بيّن أن الرباعي OCAE متوازي الأضلاع.

ب) استنتج أن إحداثيات النقطة E هي $(-2;2\sqrt{2})$

4) نعتبر الدائرة $\mathscr{C}$ التي قطرها $[BC]$

لتكن H المسقط العمودي للنقطة E على $(OI)$

أ) بيّن أن الرباعي OAEH مستطيل.

ب) بيّن أن $KA = 3$ واستنتج أن النقطة E تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}$

**التمرين الخامس ( 3.5 نقاط)**

يعرض الجدول الإحصائي التالي توزيعا لـ 100 عامل بمصنع حسب الزيادة في المرتب الشهري:

| قيمة الزيادة بالدينار (الفئة) | $[50, 100[$ | $[100, 150[$ | $[150, 200[$ | $[200, 250[$ | $[250, 300[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد العملة (التكرار) | 25 | 15 | 30 | 20 | 10 |

1) حدّد الفئة المنوال لهذه السلسلة الإحصائية واحسب المعدّل الحسابي للزيادة في المرتب الشهري.

2) أ) كوّن جدول التكرارات التراكمية الصاعدة لهذه السلسلة الإحصائية.

ب) أرسم مضلّع التكرارات التراكمية الصاعدة.

ج) استنتج قيمة تقريبية لموسّط الزيادة في المرتب الشهري لعمّال هذا المصنع.

3) اشترى أحد عمّال هذا المصنع هدية لابنته بمناسبة حصولها على معدّل سنوي متميّز.

أحسب احتمال أن يكون هذا العامل من بين الذين تمتعوا بزيادة في مرتبهم الشهري أقل من 150 دينارا.

❖ **التمرين الأول :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1← ب | 2← ج | 3← أ | 4← ج |

1) $b=2\pi-2\approx 2\times 3,14-2\approx 4.28\in[4;5[$

2) $\frac{3}{5}x=\frac{4}{5}(5-x)$ يعني $\frac{3}{5}x=\frac{4}{\cancel{5}}\times\cancel{5}-\frac{4}{5}x$

يعني $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}x=4$

يعني $\frac{7}{5}x=4$

يعني $x=4\times\frac{5}{7}$

يعني $x=\frac{20}{7}$

3) $\frac{2x}{1+\sqrt{3}}\le 1-\sqrt{3}$ يعني $\frac{2x}{\cancel{1+\sqrt{3}}}\times\cancel{(1+\sqrt{3})}\le(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})$

يعني $2x\le -2$

يعني $x\le -1$ يعني $x\in]-\infty;-1]$

4) بما أن (BF) يعامد المستقيمين (FE) و (FG) المتقاطعين في F و المحتويين في المستوي (HFG) فإنّ (BF) عمودي على المستوي (HFG)

❖ **التمرين الثاني :**

1) أ)

$a=12+\sqrt{200}-\sqrt{8}$

$=12+10\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=12+8\sqrt{2}$

$a=2(6+4\sqrt{2})$

ب) لنا $(4\sqrt{2})^2=32$ و $(3\sqrt{3})^2=27$ و $27<32$

$\begin{cases}(3\sqrt{3})^2<(4\sqrt{2})^2\\ 3\sqrt{3} \text{ و } 4\sqrt{2} \text{ موجبان}\end{cases}$ إذن $3\sqrt{3}<4\sqrt{2}$

لنا $3\sqrt{3}<4\sqrt{2}$ يعني $3\sqrt{3}+6<4\sqrt{2}+6$

يعني $(3\sqrt{3}+6)\times 2<(4\sqrt{2}+6)\times 2$ لأن $(0<2)$

يعني $b<a$

2)

$(2+2\sqrt{2})^2=2^2+2\times 2\times 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2$

$=4+8\sqrt{2}+8$

$=12+8\sqrt{2}$

$=2(6+4\sqrt{2})$

$(2+2\sqrt{2})^2=a$

$(3+\sqrt{3})^2=3^2+2\times 3\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=9+6\sqrt{3}+3$

$=12+6\sqrt{3}$

$=2(6+3\sqrt{3})$

$(3+\sqrt{3})^2=b$

3) أ) لنا $c^2=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{(2+2\sqrt{2})^2}=\frac{a}{b}$ و نعلم أن $a<b$ إذن $\frac{a}{b}<1$

و بالتالي $c^2<1$

ب)

من ناحية لدينا : $\begin{cases}c^2<1\\ c \text{ موجب}\end{cases}$ و إذن $c<1$

و من ناحية أخرى لدينا :

$c-\frac{1}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2+2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$

$=\frac{3+\sqrt{3}}{2+2\sqrt{2}}-\frac{1\times(1+\sqrt{2})}{2\times(1+\sqrt{2})}$

$=\frac{3+\sqrt{3}-1+\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$

$c-\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}>0$

و بالتالي $c>\frac{1}{2}$

الخلاصة : $\frac{1}{2}<c<1$

❖ **التمرين الثالث** : ( وحدة قيس الطول هي cm )

1) في حالة $x=5$ فإنّ

$$E=5^2-\frac{32}{5}\times5+16=25-32+16=9$$

2)

$$\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=x^2-2\times x\times\frac{16}{5}+\left(\frac{16}{5}\right)^2+\frac{144}{25}$$

$$=x^2-\frac{32}{5}x+\frac{256}{25}+\frac{144}{25}$$

$$=x^2-\frac{32}{5}x+\frac{400}{25}$$

$$=x^2-\frac{32}{5}x+16$$

$$\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=E$$

3) أ) بتطبيق نظريّة بيتاغور في المثلث ABC القائم في A نـجـد :

$$BC^2=AB^2+AC^2=(4)^2+(3)^2=16+9=25$$

إذن $BC=\sqrt{25}=5$

ب) بتطبيق مبرهنة طالس في المثلث ABC حيث

$H\in(AB)$ و $M\in(BC)$ و $(MH)//(BC)$ نـجـد

$$\frac{BM}{BC}=\frac{HM}{AC}$$

يعني $HM=\frac{BM}{BC}\times AC=\frac{a}{5}\times3=\frac{3}{5}a$

و منـه $HM=\frac{3}{5}a$

أ) بما أنّ (AC) مُماس للدائرة ζ في k فإنّ $(AC)\perp(MK)$ و

نعلم أنّ $(AC)\perp(AB)$ و بالتالي $(MK)//(AB)$

بتطبيق مبرهنة طالس في المثلث ABC حيث

$M\in(BC)$ و $K\in(AC)$ و $(MK)//(AB)$ نـجـد

$$\frac{CM}{CB}=\frac{KM}{AB}$$

يعني $KM=\frac{CM}{CB}\times AB=\frac{(5-a)}{5}\times4=\frac{4}{5}(5-a)$

ومنه $KM=\frac{4}{5}(5-a)$

ب) بتطبيق نظريّة بيتاغور في المثلث MHK القائم في H نـجـد:

$$HK^2=KM^2+HM^2$$

$$=\left(\frac{4}{5}(5-a)\right)^2+\left(\frac{3}{5}a\right)^2$$

$$=\frac{16}{25}\left(25-10a+a^2\right)+\frac{9}{25}a^2$$

$$=16-\frac{160}{25}a+\frac{16}{25}a^2+\frac{9}{25}a^2$$

$$HK^2=a^2-\frac{32}{5}a+16$$

ج) بما أنّ AHMK مستطيل و نعلم أن في المستطيل القطران متقايسان فإنّ **AM=HK**

$AM=\frac{12}{5}$ يعني $AM^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2$ ( AM و $\frac{12}{5}$ موجبان)

يعني $HK^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2$ (لأن AM=HK)

يعني $a^2-\frac{32}{5}a+16=\left(\frac{12}{5}\right)^2$ ( حسب السؤال 4)ب) )

يعني $\left(a-\frac{16}{5}\right)^2+\cancel{\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\cancel{\left(\frac{12}{5}\right)^2}$ ( حسب السؤال 2 )

يعني $\left(a-\frac{16}{5}\right)^2=0$

يعني $a=\frac{16}{5}$ $\left(\frac{16}{5}\in\,]0;5[\right)$

❖ **التمرين الرّابع** : ( وحدة قيس الطول هي cm )

1) أ) لنا $\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-4+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1=x_K$

و $\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{0+0}{2}=\frac{0}{2}=0=y_K$

إذن K منتصف [BC]

حساب OB و OC و BC :

$$OB=|x_B-x_O|\times OI=|-4-0|\times1=|-4|=4$$

$$OC=|x_C-x_O|\times OI=|2-0|\times1=2=2$$

$$BC=|x_C-x_B|\times OI=|2-(-4)|\times1=|6|=6$$

(او بما أن $O\in[BC]$ فإنّ BC=OB+OC=4+2=6 )

2) أ)بتطبيق نظرية بيتاغور في المثلث OAC القائم في O نجد :

$$OA^2+OC^2=AC^2$$

يعني $OA^2=AC^2-OC^2$

يعني $OA^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2^2=12-4=8$

إذن $OA=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

- بما أن $A\in[OJ)$ فإن :

$x_A=0$ و $|y_A-x_O|\times OJ=OA$

يعني $x_A=0$ و $|y_A-0|\times 1=2\sqrt{2}$

يعني $x_A=0$ و $|y_A|=2\sqrt{2}$

يعني $x_A=0$ و ( $y_A=2\sqrt{2}$ او $\cancel{y_A=-2\sqrt{2}}$ )

(علما أنّ $A\in[OJ)$ أي $y_A\geq 0$)

إذن $x_A=0$ و $y_A=2\sqrt{2}$

و منهإحداثيات النقطة A هي $\left(0\,;\,2\sqrt{2}\right)$

ب) بتطبيق نظرية بيتاغور في المثلث OAB القائم في O نجد :

$$AB^2=OA^2+OB^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+4^2=8+16=24$$

إذن $AB=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

3) أ) في الرّباعي OCAE لدينا :

P منتصف[OA] ( معطى )

P منتصف[EC] ( E مناظرة C بالنسبة الى P )

- بما أن الرّباعي OCAE قطراه يتقاطعان في منتصفيهما P فإنه متوازي الأضلاع

ب) بما أن الرّباعي OCAE متوازي الأضلاع فإن :

(AE)//(OC) و AE=OC

و نعلم أن OC=2 و المستقيمان (OC) و(OI) منطبقان ( $I\in(OC)$ )

إذن $AE=|x_E-x_A|=2$ و (AE)//(OI)

إذن $|x_E-x_A|=2$

يعني $|x_E-0|=2$

يعني $x_E=-2$ او $\cancel{x_E=2}$ ( لا يمكن لأن $x_E<0$ )

و من جهة أخرى نعلم أن (AE)//(OI) فإن $y_E=y_A=2\sqrt{2}$

إذن إحداثيات النقطة E هي $\left(-2\,;\,2\sqrt{2}\right)$

4) أ) في الرباعي OAEH لدينا

- $\widehat{EHO}=90°$ ( H المسقط العمودي لـ E على (OI))
- $\widehat{AOH}=90°$ ( (O;I;J) معين متعامد)
- $\widehat{OAE}=90°$ ( (AE)//(OI) و $(AO)\perp(OI)$ )

بما أنّ الرّباعي OAEH له 3 زوايا قائمة فإنه مستطيل

ب)بتطبيق نظرية بيتاغور في المثلث OAK القائم في O نجد :

$$KA^2=OA^2+OI^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2=8+1=9$$

إذن $KA=\sqrt{9}=3$

❖ إستنتج أنّ $E\in\zeta$

← طريقة أولى :

بما أنّ ζ دائرة قطرها [BC] و K منتصف [BC] فإن الدائرة ζ مركزها K و قيس طول شعاعها يساوي 3 ( $\frac{BC}{2}=\frac{6}{2}=3$ )

و بما أن KA=3 فإن $A\in\zeta$

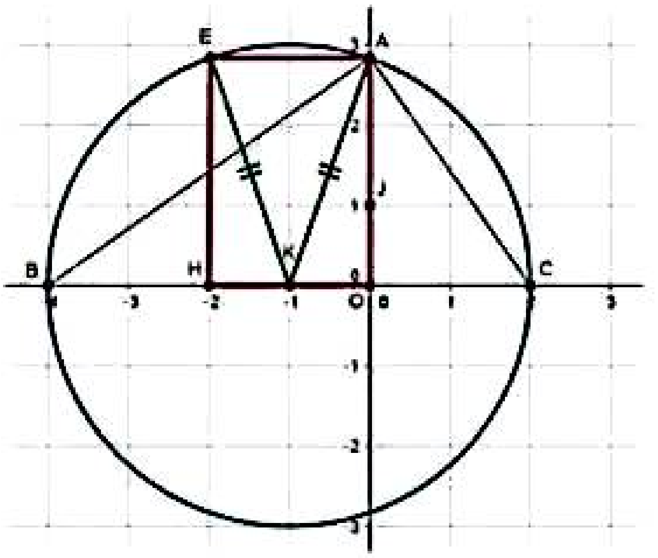
بما أن OAEH مستطيل فإن لديه محوري تناظر و هما الموسطات العمودية لأضلاعه و نعلم أنّ K منتصف [HO] إذن K نقطة من الموسطالعموي لـ[AE] و منه KE=KA و نعلم أنّ A نقطة من الدائرة ζالتي مركزهاK فإن $E\in\zeta$

← طريقة ثانية :

في المثلثين OAKو HEK لدينا

- $\widehat{AOK}=\widehat{EHK}$ زاويتان قائمتان
- OA=EH ضلعتن متقابلان في المستطيل
- KO=KH( KO=1 و KH=OH-KO=AE-KO=3-2=1)

إذن حسب الحالة الثانية لتقايس المثلثات العامة فإن المثلثين OAK و HEKمتقايسان و حسب العناصر النظيرة فإنّ KE=KA و نعلم أنّ A نقطة من الدائرة ζ التي مركزها K فإن $E\in\zeta$



## التمرين الخامس :

1)

- الفئة المنوال هي $[150 ; 200[$
- المعدّل الحسابي للزيادة في المرتّب الشهري هو

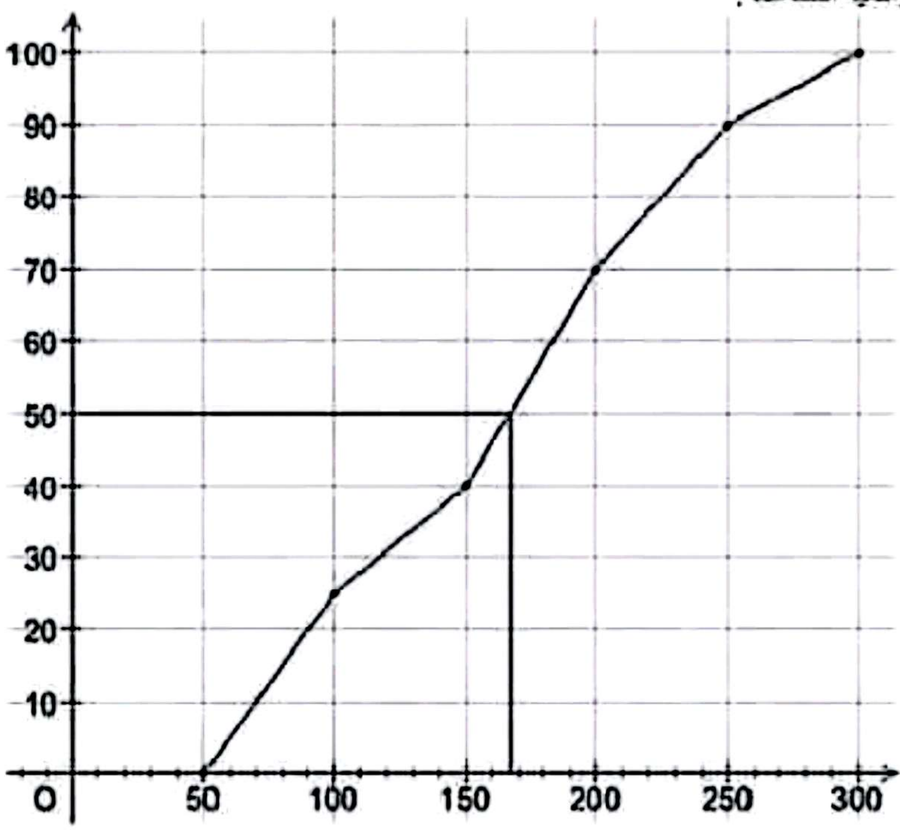
$$\overline{X}=\frac{25\times 75+15\times 125+30\times 175+20\times 225+10\times 275}{100}=\frac{16250}{100}=162,5$$

2)

| قيمة الزيادة | $[50;100[$ | $[100;150[$ | $[150;200[$ | $[200;250[$ | $[250;300[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| مركز الفئة | 75 | 125 | 175 | 225 | 275 |
| التكرار(عدد العملة) | 25 | 15 | 30 | 20 | 10 |
| التكرار التراكمي الصاعد | 25 | 40 | 70 | 90 | 100 |

التكرار التراكمي الصاعد

ب) مضلّع التكرارات التراكميّة الصّاعدة :




قيمة الزيادة

ج) القيمة التقريبيّة للموسط هي 167 دينارا $Me\approx 167$

3) احتمال أن يكون العامل من بين الذين تمتعوا بزيادة في مرتبهم الشهري أقل من 150 دينار هي

$$\frac{25+15}{100}=\frac{40}{100}=0,4$$

( أي 40% )