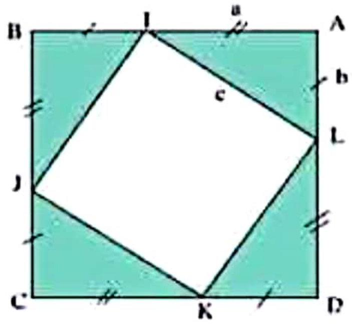
المستوى: 9 أساسي 2021/ 2020	العلاقات القياسيّة في المثلّث القائم	إعدادية ابن سينا الرّقاب الأستاذ : مــراد الفاهــم

I. نظرية بيتاغور :

نشاط عــــ02ــدد ص 173 :

احسب بدلالة a و b و c مساحة المربّع $ABCD$ بطريقتين مختلفتين ثمّ استنتج أنّ $c^2 = a^2 + b^2$



- نبيّن أوّلا أنّ المثلّثات AIL و BJI و CKJ و DLK متقايسة

لنا - $AI = BJ = CK = DL = a$

- $AL = BI = CJ = DK = b$

- $I\hat{A}L = I\hat{B}J = J\hat{C}K = K\hat{D}L = 90°$

إذًا حسب الحالة الثّانية لتقايس المثلّثات العامّة فإنّ هذه المثلّثات متقايسة

إذًا لها نفس المساحة

- نبيّن ثانيا أنّ الرّباعي $IJKL$ مربّع

بما أن المثلّثات AIL و BJI و CKJ و DLK متقايسة فإنّ بقية العناصر النّظيرة متقايسة مثنى مثنى و منها: $IL = IJ = JK = KL$

و لنا $A\hat{L}I = B\hat{I}J$ و $A\hat{L}I + A\hat{I}L = 90°$ إذًا $A\hat{I}L + B\hat{I}J = 90°$

إذًا $L\hat{I}J = 180 - (A\hat{I}L + B\hat{I}J) = 180 - 90 = 90°$

و بالتّالي الرّباعي $IJKL$ مربّع

لتكن S مساحة المربّع ABCD

طريقة 1 : $S = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

طريقة 2 : $S = S_{IJKL} + 4 \times S_{AIL}$

$$= c^2 + 4 \times \frac{a \times b}{2}$$

$$= c^2 + 2ab$$

من خلال الطّريقتين 1 و 2 نستنتج أنّ $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

إذًا $a^2 + b^2 = c^2$

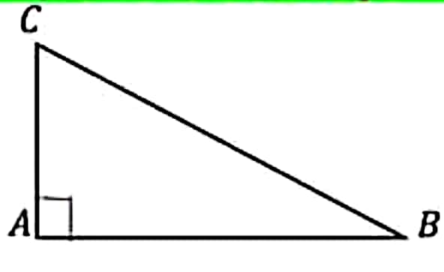
حيث a و b و c تمثّل أقيسة أضلاع المثلّث AIL القائم في A

إذًا $IL^2 = AI^2 + AL^2$

عمومًا : نظرية بيتاغور

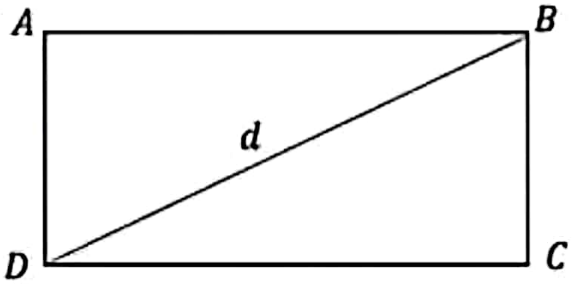
مربّع طول الوتر في المثلّث القائم يساوي مجموع مربّعي طولي الضّلعين الآخرين

إذا كان ABC مثلّثا قائما في A فإنّ $BC^2 = AB^2 + AC^2$



تطبيق عدد 01 ص 174 :

قطعة أرض مستطيلة الشّكل بعداها $210m$ و $200m$ إذًا قيس طول قطرها d بتطبيق نظريّة بيتاغور في المثلّث القائم $d^2 = 210^2 + 200^2$



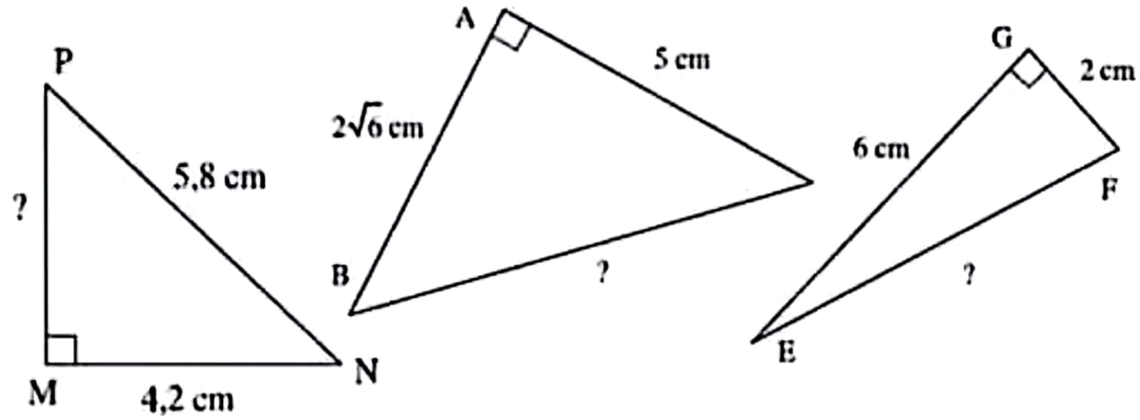
$$= 44100 + 40000$$

$$= 84100$$

إذًا $d = \sqrt{84100} = 290m$

تطبيق عدد 02 ص 174 :

ا في كلّ مثلّث من المثلّثات التّالية احسب طول الضّلع المجهول



احسب طول الضّلع المجهول في كلّ مثلّث

- المثلّث EFG قائم في G إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

$$EF^2 = GE^2 + GF^2$$
$$= 6^2 + 4^2$$
$$= 36 + 4$$
$$= 40$$
$$EF = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

- المثلّث ABC قائم الزّاوية في A إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

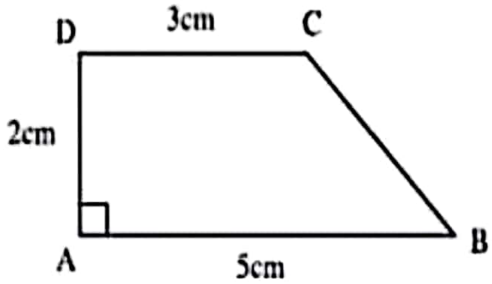
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$= \left(2\sqrt{6}\right)^2 + 5^2$$
$$= 24 + 25$$
$$= 49$$
$$EF = \sqrt{49} = 7$$

- المثلّث MNP قائم الزّاوية في M إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

$$NP^2 = MP^2 + MN^2$$
$$MP^2 = NP^2 - MN^2$$
$$= (5.8)^2 - (4.2)^2$$

$$= 33.64 - 17.64$$
$$= 16$$
$$EF = \sqrt{16} = 4$$

تمرين عدد 02 ص 182 :



$ABCD$ شبه منحرف قائم في A و D حيث $AB=5cm$ و $AD=2cm$ و $DC=3cm$
احسب AC و BD و BC

- المثلّث ADC قائم في D إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

$$AC^2 = DA^2 + DC^2$$
$$= 2^2 + 3^2$$
$$= 4 + 9$$
$$= 13$$
$$EF = \sqrt{13}$$

- المثلّث ABD قائم في A إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

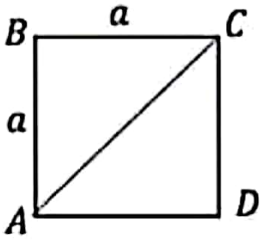
$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$
$$= 2^2 + 5^2$$
$$= 4 + 25$$
$$= 29$$
$$BD = \sqrt{29}$$

- لتكن H المسقط العمودي لـ C على (AB) إذًا المثلّث BCH قائم في H حيث $CH=2cm$ و $BH=2cm$ إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

$$BC^2 = BH^2 + CH^2$$
$$= 2^2 + 2^2$$
$$= 4 + 4$$
$$= 8$$
$$BD = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

II تطبيقات نظريّة بيتاغور :

I) قيس طول القطر في مربّع :



نشاط عدد 01 : ليكن $ABCD$ مربّعا طول ضلعه a (a عدد موجب) .
أوجد طول قطره AC بدلالة a
المثلّث ABC قائم الزّاوية في B إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2$$
$$= 2a^2$$
$$AC = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{2}$$

نشاط عدد 02 :

ليكن $ABCD$ مربّعًا طول ضلعه a و طول قطره d . أوجد مساحة المربّع بطريقتين مختلفتين .
ماذا تستنتج ؟

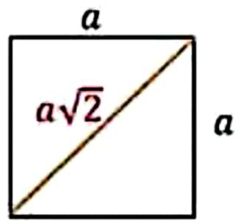
لتكن S مساحة المربّع

$$S = a^2 \quad \text{و} \quad S = \frac{d^2}{2}$$

نستنتج أنّ $\frac{d^2}{2} = a^2$ إذًا $d^2 = 2a^2$

إذًا $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{2}$

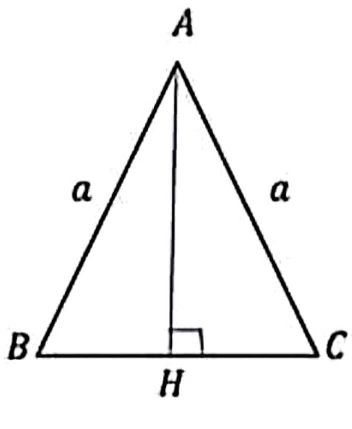
عمومًا : إذا كان a قيس طول ضلع مربع فان قيس طول قطره يساوي $a\sqrt{2}$



2) قيس طول الإرتفاع في مثلّث متقايس الأضلاع :

نشاط عدد 05 ص 175 :

ليكن ABC مثلّثًا متقايس الأضلاع طول ضلعه a و $[AH]$ ارتفاعه الصّادر من A



أ- بيّن أنّ $AH^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

المثلّث ABH قائم الزّاوية في H إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

$$AB^2 = AH^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

إذًا

$$AH^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

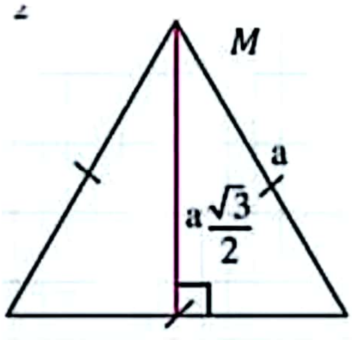
ب – استنتج AH بدلالة a

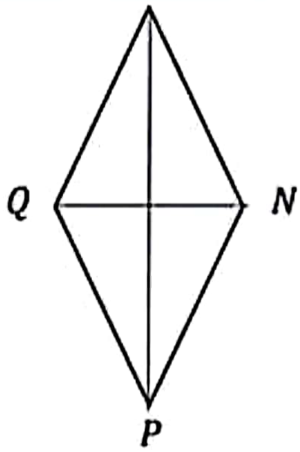
لنا

$$AH^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$
$$= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$= \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$
$$= \frac{3a^2}{4}$$

إذًا $AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

عمومًا : اذا كان a طول ضلع مثلث متقايس الأضلاع فإنّ طول الارتفاع الصادر من احدى قممه هو $\frac{\sqrt{3}a}{2}$





تطبيق : ليكن $MNPQ$ معينًا حيث $MN = 5cm$ و $N\hat{M}Q = 60°$

أوجد NQ و MP

لنا $MN = MQ = 5cm$ و $N\hat{M}Q = 60°$

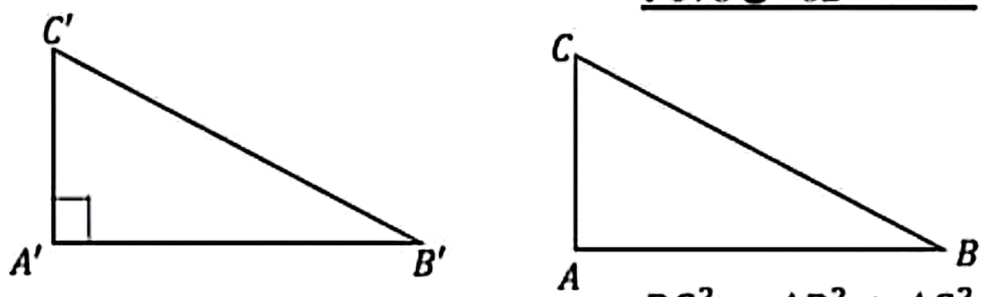
إذًا المثلّث MNQ متقايس الأضلاع إذًا $NQ = 5cm$

إذًا ارتفاعه الصّادر من قمّته M يساوي $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

إذًا $MP = 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

III) عكس نظريّة بيتاغور :

نشاط عدد02 ص 176 :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

1) بيّن أنّ $B'C' = BC$

لنا المثلّث $A'B'C'$ قائم الزّاوية في A' إذًا بتطبيق نظريّة بيتاغور نتحصّل على

$$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$$

و علمًا أنّ $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ فإنّ $B'C'^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2$

إذًا $B'C' = BC$

2) استنتج أنّ المثلّثين $A'B'C'$ و ABC متقايسان :

في هذين المثلّثين لنا :

$AB=A'B'$ و $AC=A'C'$ و $BC=B'C'$ إذا المثلّثان $A'B'C'$ و ABC متقايسان بتطبيق الحالة الثّالثة لتقايس المثلّثات

3) بيّن أنّ المثلّث ABC قائم الزّاوية :

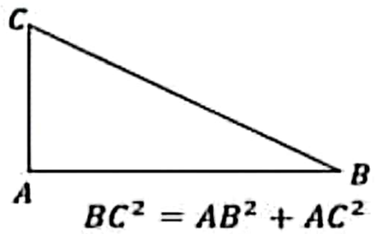
ينتج عن تقايس المثلّثين $A'B'C'$ و ABC تقايس بقيّة العناصر النّظيرة الأخرى مثنى مثنى

و منها الزّاوية $B'\widehat{A'}C'$ نظيرة للزّاوية $B\hat{A}C$ إذا $B\hat{A}C=B'\widehat{A'}C$

و علمًا أنّ $B'\widehat{A'}C' = 90°$ فإنّ $B\hat{A}C = 90°$

و بالتّالي المثلّث ABC قائم الزّاوية في A .

عمومًا : إذا كان ABC مثلّثا حيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإنّه قائم الزّاوية في A



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

تطبيق : ليكن ABC مثلّثا حيث $AB=\sqrt{3}$ و $AC=1$ و $BC=2$. بيّن أنّ المثلّث ABC قائم

$$BC^2 = 2^2 = 4 \text{ و } AB^2 + AC^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$$

إذا $BC^2 = AB^2 + AC^2$ إذا المثلّث ABC قائم في A

تطبيق عدد 02 ص 176 :

أ/ بيّن أنّ النّقاط A و B و I ليست على استقامة واحدة :

$AI + BI = \frac{35}{37}a + \frac{12}{37}a = \frac{47}{37}a$ و $AB=a$ إذا $AI + BI > AB$

$AI - BI = \frac{35}{37}a - \frac{12}{37}a = \frac{23}{37}a$ إذا $AI - BI < AB$

إذًا النّقاط A و B و I هي رؤوس لمثلّث

إذًا النّقاط A و B و I ليست على استقامة واحدة

ب/ بيّن أنّ النّقطة I تنتمي إلى الدّائرة

$$AI^2 + BI^2 = \left(\frac{35}{37}a\right)^2 + \left(\frac{12}{37}a\right)^2 = \frac{1225}{1369}a^2 + \frac{144}{1369}a^2 = \frac{1369}{1369}a^2 = a^2 = AB^2$$

إذًا حسب عكس نظريّة بيتاغور فإنّ المثلّث ABI قائم في I

و بذلك النّقطة I تنتمي إلى الدّائرة التي قطرها $[AB]$ و هي الدّائرة .

IV العلاقة : $AH \times BC = AB \times AC$

نشاط عدد 01 ص 177 :

احسب S مساحة المثلّث ABC بطريقتين مختلفتين

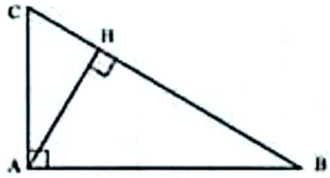
$S = \frac{AB \times AC}{2}$ و $S = \frac{AH \times BC}{2}$

إذًا $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2}$ إذًا $AH \times BC = AB \times AC$

عمومًا :

إذا كان ABC مثلثًا قائما في A و H المسقط العمودي لـ A على (BC)

فإنّ $AH \times BC = AB \times AC$



تطبيق عدد 01 ص 177 :

- احسب AB

المثلّث ABC قائم الزّاوية في A إذًا حسب نظرية بيتاغور فإنّ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

إذًا $AB^2 = BC^2 - AC^2$

$$= 8^2 - 6^2$$

$$= 64 - 36$$

$$= 28$$

إذًا $AB = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

- احسب AH

المثلّث ABC قائم الزّاوية في A و H المسقط العمودي لـ A على (BC)

إذًا حسب العلاقة القياسية $AH \times BC = AB \times AC$

إذًا $AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{2\sqrt{7} \times 6}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$

احسب BH

المثلّث ABH قائم الزّاوية في H إذًا حسب نظرية بيتاغور فإنّ :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$BH^2 = AB^2 - AH^2$$

$$= \left(2\sqrt{7}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$$= 28 - \frac{63}{4}$$

$$= \frac{112}{4} - \frac{63}{4}$$

$$= \frac{49}{4}$$

إذًا $BH = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$

احسب CH

لنا $H \in [BC]$ إذًا $CH = BC - BH = 8 - \frac{7}{2} = \frac{16}{2} - \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$

تطبيق عدد 02 ص 177 :

بيّن أنّ : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

لنا ABC مثلث قائم في A و H المسقط العمودي لـ A على (BC)

إذًا حسب العلاقة القياسية $AH \times BC = AB \times AC$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\frac{AB^2 \times AC^2}{BC^2}}$$

$$= \frac{BC^2}{AB^2 \times AC^2}$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \times AC^2}$$

$$= \frac{AB^2}{AB^2 \times AC^2} + \frac{AC^2}{AB^2 \times AC^2}$$

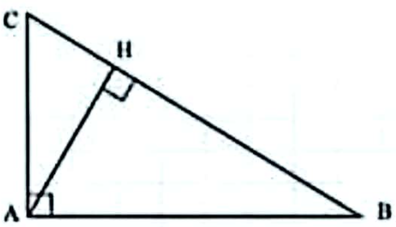
$$= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

طريقة ثانية :

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \times AC^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \times AC^2} = \frac{1}{AH^2}$$

V. العلاقة : $AH^2 = BH \times CH$

نشاط عدد 01 ص 179



1) احسب AH^2 بطريقتين مختلفتين :

طريقة 1 : المثلّث ABH قائم في H إذًا حسب نظرية بيتاغور فإنّ :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ إذًا $AH^2 = AB^2 - BH^2$ (1)

المثلّث ACH قائم في H إذًا حسب نظرية بيتاغور فإنّ :

$AC^2 = AH^2 + CH^2$ إذًا $AH^2 = AC^2 - CH^2$ (2)

2) من خلال (1) + (2) نتحصّل على :

$$AH^2 + AH^2 = AB^2 - BH^2 + AC^2 - CH^2$$

إذًا $2AH^2 = AB^2 + AC^2 - BH^2 - CH^2$

$$= BC^2 - (BH^2 + CH^2)$$

3) نلاحظ أنّ $BC^2 = (BH + CH)^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH \times CH$

إذًا $2AH^2 = BC^2 - (BH^2 + CH^2)$

$$2AH^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH \times CH - BH^2 - CH^2$$

إذًا $2AH^2 = 2BH \times CH$ إذًا $AH^2 = BH \times CH$

عموما : إذا كان ABC مثلثا قائما في A و H المسقط العمودي لـ A على (BC)

فإن $AH^2 = BH \times CH$

تطبيق ص 180 :

احسب AB

طريقة 1 : المثلّث BCD قائم الزّاوية في D و A المسقط العمودي لـ D على (BC) إذًا

إذًا $AD^2 = AB \times AC$ $\quad$ $AB = \frac{AD^2}{AC} = \frac{3^2}{\frac{9}{4}} = 9 \times \frac{4}{9} = 4cm$

طريقة 2 : المثلّث ABD قائم الزّاوية في A إذًا حسب نظرية بيتاغور فإنّ :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

إذًا $AB^2 = BD^2 - AD^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

إذًا $AB = 4cm$

احسب CD :

طريقة 1 : المثلّث ACD قائم الزّاوية في A إذًا حسب نظرية بيتاغور فإنّ :

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 = 3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{144}{16} + \frac{81}{16} = \frac{225}{16}$$

إذًا $CD = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$

طريقة 2 : المثلّث BCD قائم الزّاوية في D و A المسقط العمودي لـ D على (BC)

إذًا $AD \times BC = DB \times DC$ إذًا $CD = \frac{AD \times BC}{BD} = \frac{3 \times \frac{25}{4}}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{25}{4} = \frac{15}{4}$