تمرين عدد 01 : احسب: $(-2)^3$، $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$، $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$، $\left(-\frac{109}{11}\right)^0$، -10^3، $\left(\sqrt{2}\right)^2$، $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^4$، $\left(-2\sqrt{7}\right)^3$

تمرين عدد 02: احسب: $(-1)^{-11}$ ، $\left(-\sqrt{2}\right)^{-2}$ ، $(-0.5)^{-3}$ ، $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ ، $\left(-\sqrt{3}\right)^{-1}$ ، -10^{-6} ،

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$ ، $\left(-2\sqrt{5}\right)^{-3}$ ،

تمرين عدد 03: ضع العلامة ☒ أمام الإجابة الصحيحة:

أ) إذا كان $a \in \mathbb{R}^*$ و $n \in \mathbb{Z}$ و $p \in \mathbb{Z}$ فإن: ☐ $(a^n)^p = a^{n+p}$ ☐ $(a^n)^p = a^{n\times p}$ ☐ $(a^n)^p = a^{n-p}$

ب) إذا كان $b \in \mathbb{R}^*$ و $n \in \mathbb{Z}$ و $m \in \mathbb{Z}$ فإن: ☐ $\frac{b^n}{b^m} = b^{n\times m}$ ☐ $\frac{b^n}{b^m} = b^{n+m}$ ☐ $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

تمرين عدد 04: اكتب في صيغة قوة عدد حقيقي:

$\left(-\frac{5}{3}\right)^{-4} \times \left(-\frac{3}{7}\right)^{-4}$

$(2\pi)^{-11} \times \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{-11}$

$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5} \times \left(-\sqrt{5}\right)^{-5} \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-5}$

$\left(-\sqrt{7}\right)^5 \times \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^5$

تمرين عدد 05: اكتب في صيغة قوة عدد حقيقي:

$\left[\left(-\frac{8}{7}\right)^3\right]^{-5}$

$\left[\left(-\sqrt{3}\right)^{-2}\right]^7$

$\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^{16} \times \left[\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2\right]^8 \times \left[\left(\frac{3}{11}\right)^{-4}\right]^{-4}$

$\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^6 \times \left[\left(\sqrt{3}\right)^{-3}\right]^{-4}$ ، $\left[\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-3}\right]^{-4}$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

تمريـــن عـــدد 06:

1) ليكن $x \in \mathbb{R}_+$ و $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن $\sqrt{x^{2n}} = x^n$.

2) اكتب في صيغة قوة عدد صحيح طبيعي:

$\sqrt{3}^4$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-10}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^{-8} \times \left(\sqrt{13}\right)^{8}$

$\left(-\sqrt{2}\right)^{12}$ | $(0.5)^{-3}$

تمريـــن عـــدد 07: اكتـب فـي صـيغة قـوة عـدد حقيقـي:

$\left(-\sqrt{3}\right)^{5} \times \left(-\sqrt{3}\right)^{-7}$ | $\left(\frac{4}{3}\right)^{6} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-12}$ | $\left(\frac{\sqrt{5}}{\pi}\right)^{-6} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-5} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-6}$

تمريـــن عـــدد 08: اكتب في صيغة قوة عدد حقيقي:

$\frac{8^{-4}}{2^{-4}}$ | $\frac{(-9\pi)^{12}}{(3\pi)^{12}}$

$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{9}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{9}}$ | $\frac{\left(-3\sqrt{15}\right)^{-7}}{\left(-2\sqrt{3}\right)^{-7}}$

$\frac{\left(-\sqrt{24}\right)^{-11}}{\left(-\sqrt{8}\right)^{-11}}$

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

تمريـــن عـــدد 09 : احسب العبارات التالية:

$$A=\sqrt{5}^{4}\times5^{-2}\times25\times5^{-3}\times\left(-\sqrt{5}\right)^{-6}$$

$$B=\frac{1}{5^{-2}}\times\frac{7^{2}}{3^{2}}\times\frac{25}{7^{-1}}\times\frac{3}{5^{3}}\times\left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$$

$$C=\left(2\sqrt{2}\right)^{-1}\times\left(\sqrt{2}\right)^{2}\times2^{-2}\times\sqrt{2}$$

$$D=\frac{5^{4}}{27}\times\frac{11}{5^{2}}\times3^{-5}\times11^{-3}\times\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$$

تمريـــن عـــدد 10: احسب العبارات التالية:

$$X=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\times15^{2}\times\left(\frac{9}{5}\right)^{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)\times5\times(-2)^{2}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{3}}$$

$$Y=\frac{2^{19}-2^{6}}{2^{21}-2^{8}}$$

$$T=\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\times\frac{5}{\left(\sqrt{3}\right)^{4}}\right]^{-3}-\left[\left(\sqrt{5}\right)^{-2}\times5^{5}\right]$$

تمريـــن عـــدد 11: أوجد العدد الصحيح النسبي n في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\left(\sqrt{2}\right)^{3}\times2\sqrt{2}\times2^{n}=\left(\sqrt{2}\right)^{4}$

2) $2^{-3}\times\pi^{5}\times2^{n}=(2\pi)^{5}$

3) $\left(3^{2}\times5\right)^{3}\times\left(3\times5^{2}\right)^{3}=\frac{1}{(15)^{n}}$

4) $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{-5}}{\left(\sqrt{5}\right)^{5}}\times\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{3}}{\sqrt{3}}\times\left(\sqrt{3}\times\left(\sqrt{5}\right)^{2}\right)^{n}=\left(\sqrt{15}\right)^{-10}$

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

تمريـــن عـــدد 12:

1) بين أن: $\dfrac{(2a^{-2})^{-3}\times(ab^{5})^{2}\times(b^{-3})^{2}}{8^{-1}\times(a^{2}b)^{4}}=1$ حيث $a\in IR^{*}$ و $b\in IR^{*}$

2) بين أن $\dfrac{(a\sqrt{3})^{3}\times b^{-2}\times(3ab)^{2}}{81\times(ba^{-2})^{-4}\times(a^{3}b^{-4})^{-1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ حيث $a\in IR^{*}$ و $b\in IR^{*}$

تمريـــن عـــدد 13: لتكن العبارة التالية: $X=\dfrac{(a^{-3}b^{-4})^{2}\times(a^{2}b^{-3})}{a^{4}\times(a^{-2}b^{-3})^{3}}$ حيث $a\in IR^{*}$ و $b\in IR^{*}$

1) بين أن $X=a^{-3}b^{-2}$

2) احسب X إذا كان $a=\sqrt{2}$ و $b=-\sqrt{3}$

3) احسب X إذا كان a مقلوب b.

4) أوجد a إذا علمت أن $a=b$ و $X=1$

تمريـــن عـــدد 14: باقي القسمة الاقليدية لعدد طبيعي n على 8 هو 3.

لنعتبر a عددا حقيقيا حيث $a^{2}=\sqrt{2}$

1) أثبت أن $a^{n+1}\in IN$

2) جد n حيث $a^{n+1}=128$.

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

الجداءات المعتبرة

التمرين الأول:

أحسب :

$A = (\sqrt{5} + 2)^2 =$.....

$B = (7 + \sqrt{3})^2 =$.....

$C = (4 - \sqrt{7})^2 =$.....

$D = (\sqrt{5} - 1)^2 =$.....

$E = (\sqrt{13} - 3)(\sqrt{13} + 3) =$.....

$F = (4 + \sqrt{11})(4 - \sqrt{11}) =$.....

$G = (\sqrt{5} + 3)^2 + (5 - \sqrt{5})^2 =$.....

.....

$H = (\sqrt{11} + 5)^2 - (3 - \sqrt{11})^2 =$.....

.....

التمرين الثاني :

أحسب العبارات التالية :

$(2\sqrt{5} + 1)^2 =$.....

$(5\sqrt{2} - 6)(5\sqrt{2} + 6) =$.....

$(4 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 4) =$.....

$(4\sqrt{3} + 5)^2 + (4\sqrt{3} - 5)^2 =$.....

.....

$(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^{15}(2\sqrt{7} + 3\sqrt{3})^{15} =$.....

$(5 - 2\sqrt{6})^{21}(5 + 2\sqrt{6})^{19} =$.....

.....

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثالث

لتكن العبارتين التاليتين $b = 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ و $a = \sqrt{7} + 2\sqrt{2}$

أ ـ أحسب

$a^2 =$ .....

$b^2 =$ .....

$ab =$ .....

ب ـ أثبت أن: $a^{-2} - b^{-2} = -8\sqrt{14}$

.....

.....

ج - أحسب

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} =$ .....

$\frac{3}{a} - \frac{5}{b} =$ .....

التمرين الرابع

نعتبر العبارتين: $b = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ و $a = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

1) بين أن : $a + b = 10$ و $a - b = 4\sqrt{6}$

.....

.....

.....

.....

2) بين أن a مقلوب b

.....

.....

3) بين أن : $ba^3 - ab^3 = 40\sqrt{6}$

.....

.....

.....

.....

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الأول :

❶ أحسب ما يلي

$$A = \left(2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - 3\sqrt{2}\right)^2$$

$$C = \left(2\sqrt{5} - 2\pi\right)^2$$

$$D = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)^2$$

❷ أنشر و أختصر العبارات التالية

$$A = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - x\sqrt{2}\right)^2$$

$$C = \left(\sqrt{5x} - 2\sqrt{2}\right)^2$$

$$D = \left(2\sqrt{2} + x\right)^2 - \left(3x - \sqrt{2}\right)^2$$

❸ فكك إلى جذاء عوامل العبارات التالية .

$$(3x - 1)^2 + 9x^2 - 1$$

$$(3x + 1)^2 - (x - 1)^2$$

$$16x^2 - 8x + 1 - (4x - 1)(x + 2)$$

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثاني :

لتكن العبارتان A و B حيث x

$B=\left(16x^2-8x+1\right)-(4x-1)(x+2)$ و $A=(3x+1)^2-(x-2)^2$

1) أنشر ثم اختصر العبارة A

2) أحسب العبارة A إذا علمت أن $x=\sqrt{2}$

3) أكتب A و B على شكل جذاء عوامل

4) أوجد x إذا علمت أن $A-B=0$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثالث :

لتكن العبارة $A=(x-1)^2-4$

1. أحسب A في حالة $x=0$

2. بيّن أنّ $A=(x+1)(x-3)$

ب. جد الأعداد الحقيقية x بحيث $(x-1)^2=4$

3. نعتبر العبارة $B=A-x^2+3$

أ . بيّن أنّ $B=-2x$

ب. أحسب إذن $b=1111\times1107-1110^2+3$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

1) فكك إلى جذاء عوامل.

$$a = x^2 - 6x + 9 + (6 - 2x)(x - 7)$$

$$b = x^2 - x + \frac{1}{4} + (1 - 2x)(3x - 5)$$

$$c = (3 - 2x)^2 - 9(3x + 1)^2$$

$$d = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + \left(\sqrt{8}x + 4\right)\left(x - 2\sqrt{2}\right)$$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année
+216 21 829 926 /Mathplus

$$e = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} + (4x+3)(5x-2)$$

$$f = (5x-1)^2 - (3x+6)^2 + (2x-7)(x+8)$$

$$g = (x+3)^2 + (2x+2)(x+3) + (x+1)^2$$

$$h = 4(3x-1)^2 - 25(x-1)^2$$

$$i = 4x^2 - 16x + 16 + (x-2)(3x+1)$$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année
+216 21 829 926 /Mathplus 9ème année

التمرين الأول:

نعتبر العبارتين $E = 2x^2 + 6\sqrt{2}x + 5$ و $F = (\sqrt{2}x - 3)(\sqrt{2}x + 1)$ حيث x عدد حقيقي .

1) أ) احسب E إذا علمت ان $x = -\sqrt{2}$.

ب) احسب F إذا علمت ان $x = 1$.

2) أ) بين ان : $E = (\sqrt{2}x + 3)^2 - 4$.

ب) استنتج تفكيكا للعبارة E.

3) بين أن $E + F = 2(\sqrt{2}x + 1)^2$.

4) أ) أوجد العدد الحقيقي x الذي يحقق $2x^2 + 6\sqrt{2}x + 5 = (3 + \sqrt{2}x)(\sqrt{2}x + 1)$.

ب) أوجد العدد الحقيقي x الذي يحقق $\sqrt{E + F} = 2\sqrt{2}$.

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثاني :

نعتبر العبارات التالية: $A = (2x-1)^2 - (x+3)^2$ و $B = 4x^2 - 13x - 12$

و $C = x^2 - 8x + 16$ حيث x عدد حقيقي .

1) أ) انشر ثم اختصر العبارة A .

ب) احسب القيمة العددية للعبارة A في حالة $x = 0$

2) بين أن $B = (4x+3)(x-4)$.

3) أ) فكك A و C إلى جذاء عوامل .

ب) بين أن $A + B + C = (x-4)(8x+1)$.

ج) بين أنه إذا كان A و $B + C$ متقابلان فإن $x = 4$ أو $x = -\frac{1}{8}$.

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثالث :

نعتبر العبارتين التاليتين: $A = -3x^2 - x + 2$ و $B = 7 + 6x - x^2$ حيث x عدد حقيقي .

1) بين أن $A = (2 - 3x)(x + 1)$

2) أ) بين أن $B = 16 - (3 - x)^2$.

ب) استنتج تفكيكا إلى جذاء عوامل للعبارة B .

3) أ) بين أن $A + B = (x + 1)(9 - 4)$.

ب) أوجد العدد الحقيقي x إذا كان A و B متقابلان .

4) أ) احسب القيمة العددية لكل من العبارتين A و B في حالة $x = \sqrt{2}$

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

الترتيب و المقارنة

I _ مقارنة عددين حقيقيين :

1) – قاعدة ① :

a و b عددان حقيقيان .
إذا كان $a-b\leq 0$ فإن $a\leq b$
إذا كان $a-b\geq 0$ فإن $a\geq b$

2) – أمثلة :

1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

لدينا :

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)&=2\sqrt{2}-4-\sqrt{3}+5\\&=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4\\&=\sqrt{3}+1\end{aligned}$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1\geq 0$ فإن : $\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)\geq 0$

و منه فإن : $2\sqrt{3}-4\geq\sqrt{3}-5$

---

2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x=y-3$.

لدينا : $x-y=-3$

و بما أن : $-3\leq 0$ فإن : $x-y\leq 0$.

و منه فإن : $x\leq y$

II _ الترتيب و المقارنة :

1) – الترتيب و الجمع :

أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
إذا كان $a\leq b$ فإن $a+c\leq b+c$
إذا كان $a+c\leq b+c$ فإن $a\leq b$

+216 21 829 926 /Mathplus

* مثال :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x<3$.

لنقارن العددين $x-5$ و -2 .

لدينا : $x<3$

يعني أن : $x+(-5)<3+(-5)$

$x-5<3-5$

و بالتالي فإن : $x-5<-2$

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان $\begin{cases} a\le b \\ \text{و} \\ c\le d \end{cases}$ فإن $a+c\le b+d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x<3$ و $y>2$.

لنبين أن : $x+y<5$.

لدينا : $\begin{cases} x<3 \\ 2>y \end{cases}$ يعني أن : $\begin{cases} x<3 \\ y<2 \end{cases}$

إذن : $x+y<2+3$

و باتالي فإن : $x+y<5$

---

2) – الترتيب و الضرب :

أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a\le b$ و $c>0$ فإن $a\times c\le b\times c$

إذا كان $a\le b$ و $c<0$ فإن $a\times c\ge b\times c$

إذا كان $a\times c\le b\times c$ و $c>0$ فإن $a\le b$

إذا كان $a\times c\ge b\times c$ و $c<0$ فإن $a\le b$

* مثال :

لدينا : $11\le 27$ يعني أن $11\times 5\le 27\times 5$

$11\le 27$ يعني أن $11\times(-4)\ge 27\times(-4)$

+216 21 829 926 /Mathplus

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان $\left\{\begin{array}{l} a \leq b \\ \text{و} \\ c \leq d \end{array}\right.$ فإن $a \times c \leq b \times d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$.

لدينا :

$\left\{\begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array}\right.$ و يعني أن :

$x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$

$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$

$xy < 2\sqrt{18}$

$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$

$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$

$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$

وبالتالي فإن : $xy < 6\sqrt{2}$

3) – الترتيب و المقلوب :

أ) -- خاصية :

a و b عددن حقيقيان موجبان قطعا .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

إذا كان $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ فإن $a \leq b$

ب) -- مثال :

لدينا : $7 \leq 13$ يعني أن $\frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$

$11 \geq 5$ يعني أن $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{5}$

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

4) – الترتيب و المربع :

أ) -- خاصية ① :

a و b عددان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$
إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$5 \leq 11$ يعني أن $5^2 \leq 11^2$ أي $25 \leq 121$.

ب) -- خاصية ② :

a و b عددان حقيقيان سالبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$
إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$-7 \leq -2$ يعني أن $(-7)^2 \geq (-4)^2$ أي $49 \geq 16$

---

5) – الترتيب و الجذر المربع :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* أمثلة :

1) – لنقارن العددين : $\sqrt{10}$ و $3\sqrt{3}$.

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{10}^2 = 10 \\ \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27 \end{array}\right\} \text{و}$$

إذن $\sqrt{10}^2 \leq \left(3\sqrt{3}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$

2) – لنقارن العددين : $-\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{2}$.

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{6}^2 = 6 \\ \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \end{array}\right\} \text{و}$$

إذن $\sqrt{6}^2 \leq \left(3\sqrt{2}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{6} \leq 3\sqrt{2}$. و بالتالي فإن : $-\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

III _ التأطيـر :

1) – تأطيـر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :
$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$
$x+z \leq a+b \leq y+t$

* مثال :
x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$
لنؤطر $x+y$.

لدينا : $3+(-4) \leq x+y \leq 8+2$

إذن : $-1 \leq x+y \leq 10$

2) – تأطيـر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x \leq a \leq y$
سيكون لدينا : $-y \leq -a \leq -x$

3) – تأطيـر فرق عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :
$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$
$x-t \leq a-b \leq y-z$

* ملاحظة هامة :
لتأطير $a-b$ ، نضع : $a-b=a+(-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$
لنؤطر $x-y$.

لدينا : $-2 \leq -y \leq 4$ و $3 \leq x \leq 8$

إذن : $3-2 \leq x+(-y) \leq 8+4$

و منه فإن : $1 \leq x-y \leq 12$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

4) – تأطيـر جداء عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :
$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$
$x \times z \leq a \times b \leq y \times t$

* مثال 1 :
x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $1 \leq y \leq 3$
لنؤطـر $x \times y$.

لدينا :
$3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$

إذن : $3 \leq x \times y \leq 21$

* مثال 2 :
x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5 \leq x \leq -2$ و $3 \leq y \leq 6$
لنؤطـر $x \times y$.

لدينا :
$2 \leq -x \leq 5$

إذن :
$2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6$ أي $6 \leq -xy \leq 30$

و منه فإن : $-30 \leq xy \leq -6$.

---

5) – تأطيـر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x \leq a \leq y$
سيكون لدينا : $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$

---

6) – تأطيـر خارج عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث : $b \neq 0$ و $z \neq 0$ و $t \neq 0$
و $x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$
سيكون لدينا $\frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z}$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

*** ملاحظة هامة :**

لتأطير $\frac{a}{b}$ ، نضع : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $5 \leq y \leq 9$

لنؤطر $\frac{x}{y}$.

لدينا :

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$$

إذن :

$$3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5} \quad \text{أي} \quad \frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

*** تمرين تطبيقي :**

a و b و c أعداد حقيقية بحيث :

$6 \le a \le 8$ و $-4 \le b \le -2$ و $-3 \le c \le 5$

أطـر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\dfrac{a+b}{b^2}$

الحـل :

1) – تأطير a^2 .

لدينا : $6^2 \le a^2 \le 8^2$ و منه فإن : $36 \le a^2 \le 64$

2) – تأطير b^2 .

لدينا : $(-2)^2 \le b^2 \le (-4)^2$ و منه فإن : $4 \le b^2 \le 16$

3) – تأطير $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \le 2b \le -4$

و $-4 \times 5 \le -4c \le -4 \times (-3)$ أي $12 \le -4c \le 20$

إذن : $6+(-8)+12 \le a+2b-4c \le 8+(-4)+20$

و منه فإن : $10 \le a+2b-4c \le 24$

4) – تأطير $\dfrac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4) \le a+b \le 8+(-2)$ أي $2 \le a+b \le 6$

و $\dfrac{1}{16} \le \dfrac{1}{b^2} \le \dfrac{1}{4}$

إذن : $2 \times \dfrac{1}{16} \le (a+b) \times \dfrac{1}{b^2} \le 6 \times \dfrac{1}{4}$ أي $\dfrac{2}{16} \le \dfrac{a+b}{b^2} \le \dfrac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\dfrac{1}{8} \le \dfrac{a+b}{b^2} \le \dfrac{3}{2}$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

الترتيب و المقارنة

التمرين الأول :

نعتبر العددين الحقيقيين التاليين : $a = \sqrt{45} - \left(\sqrt{20} - 1\right)$ و $b = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{24}}{\sqrt{6}}$.

أ- بين ان : $a = \sqrt{5} + 1$ و $b = \sqrt{3} + 2$.

ب- احسب a^2 و b^2 .

ت- قارن بين $4\sqrt{3}$ و $2\sqrt{5}$ ثم استنتج مقارنة بين a^2 و b^2 .

ث- بين أن : $a \prec b$ ثم استنتج ان $a \prec \dfrac{a+b}{2} \prec b$.

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثاني :

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين :

$a=\dfrac{12\sqrt{2}-18}{\sqrt{18}}$ و $b=\sqrt{14}+\sqrt{45}-\sqrt{20}-3\sqrt{5}$.

ا- بين ان $a=2-1,5\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{14}-2\sqrt{5}$.

ب- ماهي علامة كل من a و b ؟ علل جوابك.

ت- احسب a^2 و b^2 .

ج- قارن بين a^2 و b^2 ثم استنتج مقارنة بين a و b .

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثالث :

1) أ) قارن العددين 4 و $\sqrt{11}$

ب) استنتج مقارنة للعددين: 9 و $1+2\sqrt{11}$

2) نعتبر العددين X و Y حيث: $X=13-2\sqrt{12}$ و $Y=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{5}{2+\sqrt{3}}$

أ) بين أن: $X=13-4\sqrt{3}$ و $Y=12-4\sqrt{3}$

ب) قارن X و Y

ج) استنتج مقارنة لـ $-3X+5$ و $-3Y+7$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

+216 21 829 926 /Mathplus

التمرين الرابع :

1) أ- قارن 5 و $2\sqrt{5}$

ب- استنتج مقارنة العددين التّاليين في كلّ حالة من الحالات التّالية:

*/ $2\sqrt{5}+2$ و 7

*/ $\frac{1}{2\sqrt{5}+2}$ و $\frac{1}{7}$

2) a و b عددان حقيقيّان بحيث $a=1-\sqrt{6}$ و $b=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

أ- بيّن أنّ a و b سالبان.

ب- قارن a^2 و b^2

ت- استنتج مقارنة a و b،

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الخامس :

1) أ) قارن العددين $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{10}$

ب) استنتج مقارنة للعددين: $-5\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}-3\sqrt{10}$

2) نعتبر العددين a و b حيث: $a=\dfrac{\sqrt{36}+\sqrt{8}}{2}$ و $b=\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$

أ) بين أن: $a=3+\sqrt{2}$ و $b=5+\sqrt{2}$

ب) قارن a و b

ج) استنتج مقارنة لـ $\dfrac{-3}{2}a+\sqrt{5}$ و $\dfrac{-3}{2}b+\sqrt{3}$

د) استنتج مقارنة لـ $-\dfrac{1}{a}+\sqrt{2}$ و $-\dfrac{1}{b}+\sqrt{2}$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

قارن بين $\frac{11}{3}+7\sqrt{3}$ و $\frac{5}{2}+7\sqrt{3}$.

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا حيث $a \geq b$.

1) قارن بين $-\sqrt{3b}+5$ و $-\sqrt{3a}+5$

2) استنتج مقارنة لـ $\frac{2}{-\sqrt{3b}+5}$ و $\frac{2}{-\sqrt{3a}+5}$

3) قارن بين $\frac{1}{b}+\frac{11}{3}+7\sqrt{3}$ و $\frac{1}{a}+\frac{5}{2}+7\sqrt{3}$

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين السابع :

نعتبر العدد الحقيقي : $a=\sqrt{50}-\sqrt{8}(\sqrt{2}+1)$

1. بين أنّ: $a=3\sqrt{2}-4$.

أ- قارن العددين 4 و $3\sqrt{2}$ ثم استنتج أنّ: a عدد موجب.

ب-اثبت أنّ: $(3\sqrt{2}-4)^2=34-24\sqrt{2}$ ثم استنتج مقارنة العددين: $24\sqrt{2}$ و 34 .

2. نعتبر العددين: $x=\frac{7}{\sqrt{2}+1}$ و $y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

أ. بين أن: $x-y=2a$.

ب. استنتج مقارنة العددين: x^{-2} و y^{-2} .

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

مبرهنـــــة فيتـاغـــــــورس

I_ مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

1) – خاصية :

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A
فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

2) – مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في C بحيث : $AC = 2\sqrt{2}$ و $AB = 10$.
لنحسب BC .
بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في C فإن : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة)

إذن :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 10^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 100 - 8 \\ &= 92 \end{aligned}$$

و منه فإن :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{92} \\ &= \sqrt{4 \times 23} \\ &= 2\sqrt{23} \end{aligned}$$

II_ مبرهنة فيتاغورس العكسية :

1) – خاصية :

إذا كان ABC مثلثا بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$
فإن : ABC قائم الزاوية في A .

2) – مثال :

EFG مثلث بحيث : $EF = 10$ و $FG = 8$ و $CG = 6$
لنبين أن EFG مثلث قائم الزاوية .

+216 21 829 926 /Mathplus

لدينا :

$$EF^2 = 10^2 = 100$$
$$EG^2 = 6^2 = 36$$
$$FG^2 = 8^2 = 64$$

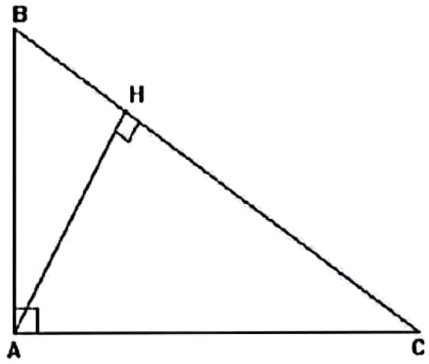
نلاحظ أن : $100 = 36 + 64$

أي : $EF^2 = EG^2 + FG^2$

وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن EFG مثلث قائم الزاوية في G .

III _ نتائج :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و H الفمسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .



سيكون لدينا :

$$AB \times AC = AH \times BC$$
$$AH^2 = HB \times HC$$
$$AB^2 = BH \times BC$$
$$AC^2 = CH \times CB$$

نسمي هذه العلاقات : العلاقات المترية في المثلث القائم الزاوية .

+216 21 829 926 /Mathplus
Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

العلاقات القياسية في المثلث القائم

التمرين الأول :

1) أرسم مستطيلا ABCD حيث : AB = 3

و BC = 10 و M نقطة من [AD] حيث AM = 4 .

انجز الرسم ثم أحسب البعد MB

2) عيّن على نصف المستقيم [DC] النقطة E حيث CE = 5 .

أ – أحسب BE ثم ME .

ب – استنتج أنّ المثلث BME قائم الزاوية في M

ج – ابن النقطة H المسقط العمودي لـ M على (BE) . ثم أحسب MH.

3) لتكن G نقطة تقاطع (MB) و (ED) .

أ – بيّن أنّ $\frac{MG}{MB} = \frac{MD}{MA}$ ثم استنتج البعد MG .

ب – أحسب GD .

ج – استنتج أنّ المثلث GBE متقايس الضلعين قمته الرئيسيّة G .

+216 21 829 926 /Mathplus

التمرين الثاني :

إبن دائرة ع مركزها O وشعاعها 4 صم و [BC] قطرا لها . الموسّط العمودي لـ [OB] يقطع الدائرة ع في نقطتين أحدهما A ويقطع [OB] في النقطة H .

1) بيّن أنّ المثلث OAB متقايس الأضلاع .

2) أحسب البعد AH

3) ابن المستقيم Δ المماس للدائرة ع في النقطة B .

Δ يقطع (OA) في النقطة E .

أ – بيّن A منتصف [OE] .

ب – أحسب البعد OE ثم EB

4) أحسب AC .

5) لتكن K المسقط العمودي لـ H على (AC) . أحسب HK .

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثالث :

ليكن MNP مثلث حيث : $MN = 2$ و $NP = 6$ و $MP = 4\sqrt{2}$

1) أ – أثبت أنّ المثلث MNP قائم . ثم حدّد الزاوية القائمة .

ب - أرسم المثلث MNP (أترك أثار البركار) .

2) عيّن على نصف المستقيم [MN] نقطة K حيث $NK = 6$ ، ثمّ **بيّن** أنّ : $PK = 4\sqrt{6}$.

3) لتكن L مناظرة K بالنسبة إلى N .

– بيّن أنّ المثلث PLK قائم في P . ثم أحسب PL

4) لتكن H المسقط العمودي لـ M على (NP) ، أحسب MH .

5) الموازي لـ (LP) والمار من N يقطع (KP) في F . بيّن أنّ F منتصف [KP] ثم أحسب NF .

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الرابع :

ليكن MNP مثلث قائم الزاوية في P حيث : $MN = 8$ و $PM = 4$

1) أ ـ أثبت أنّ $PN = 4\sqrt{3}$

ب – ابن المثلث MNP (أترك أثار البركار)

ج ـ لتكن K المسقط العمودي لـ P على (MN) .

أحسب PK و MK.

د ـ لتكن E منتصف [MN] . أثبت أنّ $KE = 2$

2) أ ـ أحسب PE .

ب ـ استنتج أنّ المثلث PME متقايس الأضلاع

ج ـ لتكن F منتصف [PM] . أحسب EF .

3) (PK) و (EF) يتقاطعان في G . أحسب EG .

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الخامس :

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث AB=4 و H المسقط العمودي للنقطة A على [BC].

1) بيّن أن $\mathbf{AH = 2\sqrt{3}}$

2) عيّن النقطة D حيث C منتصف القطعة [DB].

أ) بين أن المثلث ABD قائم الزاوية في A

ب) بين أن $\mathbf{AD = 4\sqrt{3}}$.

3) ليكن [HK] الارتفاع الصادر من H للمثلث ADH. بيّن أن : **HK= 3**

4) الموازي لـ (AB) و المار من C يقطع (AD) في النقطة M .

أ) بين أن M منتصف القطعة [AD].

ب) أحسب **MC**

5) المستقيمان (AC) و (BM) يتقاطعان في النقطة G. أحسب **AG** معللا جوابك.

+216 21 829 926 /Mathplus

التمرين السادس :

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث AB=3

و H المسقط العمودي للنقطة A على [BC].

1) بيّن أن $\mathbf{AH = \frac{9}{2\sqrt{3}}}$

2) عيّن النقطة D حيث C منتصف القطعة [DB].

أ) بين أن المثلث ABD قائم الزاوية في A .

ب) بين أن $\mathbf{AD = 3\sqrt{3}}$

3) ليكن [HK] الارتفاع الصادر من H للمثلث ADH. بيّن أن : **HK**= 2,25

4) الموازي لـ (AB) و المار من C يقطع (AD) في النقطة M .

أ) بين أن M منتصف القطعة [AD].

ب) أحسب **MC** .

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين السابع :

ليكن ABC مثلث حيث : $AB = 2$

و $BC = 6$ و $AC = 4\sqrt{2}$

1) أ – أثبت أنّ المثلث ABC قائم في A .

ب- أرسم المثلث ABC (أترك أثار البركار) .

2) عيّن على نصف المستقيم [AB] نقطة E حيث $BE = 6$ ، ثمّ **بيّن** أنّ : $CE = 4\sqrt{6}$.

3) لتكن D مناظرة E بالنسبة إلى B .

أ – بيّن أنّ المثلث CDE قائم في C .

ب – أحسب CD

4) لتكن H المسقط العمودي لـ A على (BC) ، أحسب AH .

5) عيّن نقطة M من [BC] حيث $MB = 2$ ،

المستقيم المار من M و العمودي على (BC) يقطع نصف الدائرة التي قطرها [BC] في نقطة N .

بيّن أنّ : $MN = 2\sqrt{2}$.

+216 21 829 926 /Mathplus Formation d'été Cahier de mathématique 9ème année

التمرين الثامن :

لتكن [AB] قطعة مستقيم حيث AB = 8cm

1) ابن Δ الموسّط العمودي لـ[AB].

عيّن النّقطة O منتصف [AB] و

النّقطة P على المستقيم Δ حيث OP = OA.

2) بيّن أنّ المثلّث PAB قائم الزّاوية و متقايس الضّلعين

و حدّد مركز الدّائرة ℰ المحيطة به.

3) المستقيم المار من O و الموازي لـ (AP) يقطع (PB) في النّقطة M.

بيّن أنّ M منتصف [BP].

4) المستقيمان (AM) و Δ يتقاطعان في النّقطة G.

أ- بيّن أنّ G هي مركز ثقل المثلّث PAB.

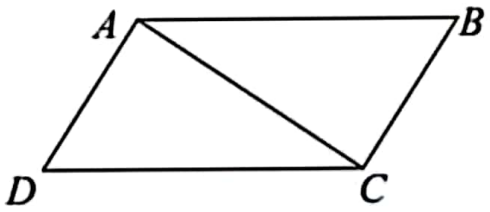
ب- أكتب AG بدلالة AM .

5) المستقيم المار من M و العموديّ على (AB) يقطع (AP) في النّقطة H.

بيّن أنّ $\frac{AP}{AH} = \frac{2}{3}$

+216 21 829 926 /Mathplus

التمرين التاسع :



$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O حيث $AD = 3cm$ و $AC = 4cm$ و $CD = 5cm$.

1- بين أنّ المثلث ADC قائم.

2- بيّن أنّ $BD = 2\sqrt{13}$

3- ليكن I منتصف $[CD]$. (AI) يقطع (BD) في E . بيّن أنّ : $AE = \frac{5}{3}$

4- لتكن الدائرة (ζ) ذات القطر $[CD]$.

أ- بيّن أنّ $A \in (\zeta)$.

ب- (BD) يقطع الدائرة (ζ) في نقطة ثانية H ماذا يمثل $[CH]$ بالنسبة إلى المثلث OBC

ج- بيّن أنّ $CH = \frac{6}{\sqrt{13}}$ و احسب HB و HD.

5- (CH) يقطع (AB) في M .بيّن أن : $\frac{BM}{CD} = \frac{9}{17}$ واستنتج البعد : BM .

+216 21 829 926 /Mathplus

(C) هي دائرة مركزها O و شعاعها 3 و [AB] قطراها.

لتكن M نقطة من (C) بحيث BM=4

و H المسقط العمودي ل M على (AB)

1) برهن أن المثلث AMB قائم الزاوية في M

ثم احسب AM و MH و AH

2) عين النقطة D بحيث M تكون منتصف [BD] ، المستقيم المار من D و العمودي على (AB) يقطع (AB) في C و (AM) في E ،بين أن E هو المركز القائم للمثلث ABD

3) المستقيمان (AD) و (BE) يتقاطعان في نقطة N . بين أن N نقطة من الدائرة (C)

4) المستقيم الموازي ل (AM) و المار من B يقطع (AD) في F .

قارن $\frac{BM}{BD}$ و $\frac{FA}{FD}$ ثم استنتج أن A هو منتصف [DF]

5) المستقيمان (AB)و (FM) يتقاطعان في I . أحسب AI

+216 21 829 926 /Mathplus