Résumé De Cours

Chapitre 1 : limites et continuité

I) Limites des fonctions

Soit C_f la représentation graphique d'une fonction *f* dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

Définition

Soit *f* une fonction dont l'ensemble de définition est D et *g* une fonction dont l'ensemble de définition est $f(D)$. On appelle fonction composée de *f* et *g*, la fonction

notée $g\,o\,f$ et définie pour tout $x\in D$, par : $(gof)(x) = g(f(x))$

Théorème

Si *f* et *g* ont même sens de variation, alors gof est croissante sur sur *I*.

***Si f* et *g* ont des sens de variations contraires, alors gof est décroissante sur *I*.**

Fonctions associées

$g(x)=f(x)+k$ $k\in\mathbb{R}$	$C_g = t_{k\vec{j}}(C_f)$
$h(x)=f(x+\lambda)$ $\lambda\in\mathbb{R}$	$C_h = t_{-\lambda\vec{i}}(C_f)$
$k(x)=-f(x)$	$C_k = S_{(xx')}(C_f)$
$l(x)=f(-x)$	$C_l = S_{(yy')}(C_f)$

Limite finie en a (a réel)

Remarques

Si une fonction admet une limite en *a*, cette limite est unique

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to a} f(x) = L\right)$$

Théorème

*** *f* est définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$**

*** Si, pour $x \neq a$, $f(x) = g(x)$, où *g* est une fonction définie en a et telle que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. alors *f* admet une limite en a, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g(a)$.**

Limite en $+\infty$ ou $-\infty$

Théorème

A l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme du plus haut degré.
A l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes.

$\lim\limits_{x\to a} f$ \ $\lim\limits_{x\to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**
$-\infty$	$-\infty$	**?**	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f$ \ $\lim\limits_{x\to a} g$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell\neq 0$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

si $l' = 0$, on ne peut conclure que lorsque *g* garde un signe constant au voisinage de a
Les situations marquées ? sont appelées formes indéterminées

Limite d'une fonction composée

a, b, l sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} gof(x) = l$

Asymptote verticale

Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de borne a et C sa courbe représentative.

Si $\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ **ou** $\lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$**, alors la droite d'équation** $x = a$ **est une asymptote verticale pour la courbe** C

Asymptote horizentale

Soit f **une fonction définie sur un intervalle de borne** $+\infty$ **ou** $-\infty$ **et** C **sa courbe représentative.**

Définition :

Si la limite de $f(x)$ **est un nombre L, quand** x **tend vers** $+\infty$**, (ou** $-\infty$**), alors la droite d'équation** $y = \mathrm{L}$ **est une asymptote horizontale pour** C **en** $+\infty$ **(ou** $-\infty$**)**

Asymptote oblique

Soit f **une fonction définie sur un intervalle de borne** $+\infty$ **ou** $-\infty$ **,** C **sa courbe représentative et** D **une droite d'équation** $y = ax + b$ **dans un repère**

droite d'équation $y = ax + b$ **est une asymptote oblique pour** C **en** $+\infty$ **(ou** $-\infty$**).**

Méthode

1) Pour avoir une asymptote verticale, la valeur interdite ne suffit pas : il faut aussi que, en cette valeur, la limite à droite ou à gauche soit infinie.

2) a) Pour montrer qu'une droite donnée D **d'équation** $y = ax + b$ **(avec** $a \neq 0$**) est asymptote oblique , on calcule la différence** $d(x) = f(x) - (ax+b)$ **; on étudie la limite à l'infini de** $d(x)$ **et on doit trouver 0.**

b) Pour étudier la position relative de C **et de** D **, on étudie le signe de** $d(x)$ **.**

I I Continuité

Soit f :I→Rf :I→R une fonction et a∈Ia∈I.

- **On dit que ff est continue en aa si ff admet pour limite f(a)f(a) en aa :**

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in I,\ |x-a|<\eta\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon.\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in I,\ |x-a|<\eta\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

- **Théorème (caractérisation séquentielle de la limite) : ff admet pour limite ℓℓ en aa si et seulement si, pour toute suite (xn)(xn) qui converge vers aa, alors (f(xn))(f(xn))converge vers f(a)f(a).**
- **On parle de continuité à droite ou de continuité à gauche lorsqu'on utilise les notions de limite à droite et de limite à gauche.**
- **On dit que ff est continue sur II si ff est continue en tout point de II.**
- **Toute combinaison linéaire, tout produit, toute composée, tout quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues est une fonction continue.**

Grands théorèmes sur la continuité

- **Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f :[a,b]→Rf :[a,b]→R une fonction continue. Soit γ∈Rγ∈R tel que γγ est compris entre f(a)f(a) et f(b)f(b). Alors il existe c∈[a,b]c∈[a,b] tel que f(c)=γf(c)=γ.**
-
- **En particulier, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.**
- **Théorème (image d'un segment) : Si f :[a,b]→Rf :[a,b]→R est continue, alors ff est bornée et atteint ses bornes.**
- **En particulier, l'image d'un segment par une application continue est un segment.**

Continuité, monotonie et injectivité

- **Théorème : Soit II un intervalle et f :I→Rf :I→R continue. Alors ff est injective si et seulement si ff est strictement monotone.**
- **Théorème : Soit II un intervalle et f :I→Jf :I→J une bijection continue. Alors la fonction réciproque f−1f−1 est continue.**