Correction de l'épreuve de Mathématiques (Session principale 2015) **Proposée par : Mr KHEMIRI Fawzi**

Exercice 1

1/ a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés et par suite ils déterminent un plan $P=(ABC)$.

b) $\overrightarrow{N_P}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan *P*. On a $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $P: x+y+z+d=0$.

$A(1,1,0)\in P$ donc $d=-2$ et enfin $P: x+y+z-2=0$.

<u>Ou bien</u> : $\left.\begin{array}{l} x_A+y_A+z_A-2=1+1-2=0\\ x_B+y_B+z_B-2=1-1+2-2=0\\ x_C+y_C+z_C-2=0+1+1-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow x+y+z-2=0$ est une équation cartésienne de *P*

puisque les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

c) $x_D+y_D+z_D-2=1+1+4-2=4\neq0$ donc $D\notin P$.

2/ a) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ d'où le triangle *ABC* est rectangle en *C*.

b) $[AB]$ est l'hypoténuse du triangle *ABC* donc le milieu *H* du segment $[AB]$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle *ABC*.

3/ La droite Δ étant perpendiculaire au plan *P* donc $\overrightarrow{N_P}$ est un vecteur directeur de Δ.

$H(1,0,1)\in\Delta$ donc $\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de Δ.

4/ a) Δ étant une droite perpendiculaire au plan *P* du cercle $\mathscr{C}$ en son centre *H* cela fait que Δ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$. $M\in\Delta$ donc *M* est équidistant de tous les points de $\mathscr{C}$. En particulier $MA=MB=MC$.

On peut procéder autrement :

$M(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$; $\alpha\in\mathbb{R}$. Le calcul donne $MA=MB=MC=\sqrt{3\alpha^2+2}$.

b) On désigne par *Q* le plan médiateur du segment $[AD]$. On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

La droite Δ et le plan *Q* sont sécants car $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{N_P}=4\neq0$. Soit *I* leur point d'intersection.

Il est clair que $IA=ID$ (propriété du plan médiateur). $I(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$, $IA=ID\Leftrightarrow IA^2=ID^2$

$\Leftrightarrow 3\alpha^2+2=\alpha^2+(\alpha-1)^2+(\alpha-3)^2\Leftrightarrow 2=-8\alpha+10\Leftrightarrow\alpha=1$ Donc $I(2,1,2)$.

c) $IA=IB=IC$ car $I\in\Delta$ et $IA=ID$ donc $IA=IB=IC=ID$ ce qui permet de conclure que le point *I* est le centre de la sphère (*S*) circonscrite au tétraèdre *ABCD*. Le rayon de (*S*) est $R=IA=\sqrt{3\alpha^2+2}$ avec $\alpha=1$.

Ainsi $R=\sqrt{5}$.

Exercice 2

1/ a) $OA = |a| = \sqrt{1+\sqrt{2}^2} = \sqrt{3}$ donc $A \in (C)$.

b) $A \in (C)$, A est un point de la droite d'équation $x = 1$ (car $\mathrm{Re}(a) = 1$) et $y_A > 0$ d'où la construction de A.

2/ a) $\Delta = \left(-2i\sqrt{3}\right)^2 - 4.1.\left(-6i\sqrt{2}\right) = -12 + 24\sqrt{2}i = 12\left(-1+2\sqrt{2}i\right) = 12\left(1^2 + 2.1.\sqrt{2}i + \left(\sqrt{2}i\right)^2\right) = 12a^2$.

b) On pose $\delta^2 = \Delta$. δ est une racine carrée de Δ .

$\delta = 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)$ donc les solutions de (E) sont

$$z' = \frac{2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left(i-1-i\sqrt{2}\right) = z_1 \quad \text{et } z'' = \frac{2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left(i+1+i\sqrt{2}\right) = z_2 .$$

3/ a) $\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{-\left(\frac{-2i\sqrt{3}}{1}\right)}{2} = i\sqrt{3} = z_K$ cela signifie que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) $\frac{z_2 - z_1}{a} = \frac{2\sqrt{3} + 2i\sqrt{6}}{1+i\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$

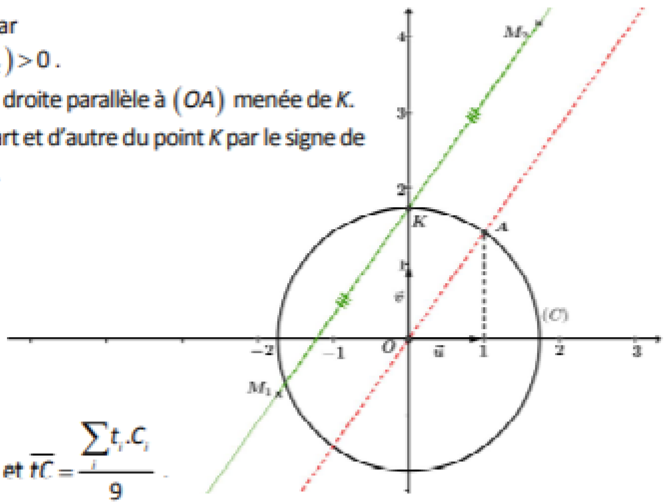
$\frac{z_{\overrightarrow{M_1M_2}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \frac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires ce qui entraine que $(M_1M_2)//(OA)$.

c) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = 2\sqrt{3}|a|$ car $\frac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$ donc $M_1M_2 = 2\sqrt{3}.\sqrt{3} = 6$.

d) La construction de K est immédiate car $K \in (C)$, z_K est imaginaire pur et $\mathrm{Im}(z_K) > 0$.

Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) menée de K.

$KM_1 = KM_2 = 3$. On les distingue de part et d'autre du point K par le signe de la partie imaginaire de z_1 et celle de z_2 .



Exercice 3

1/ a) $r = \frac{Cov(t,C)}{\sigma_t.\sigma_C}$; $Cov(t,C) = \overline{tC} - \bar{t}.\bar{C}$ et $\overline{tC} = \frac{\sum_i t_i.C_i}{9}$.

Soit alors $r = 0{,}99998$ (valeur approchée par défaut) ou encore $r = 0{,}99999$ (valeur approchée par excès).

b) $|r|$ est assez proche de 1 donc un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est fortement justifié.

c) $C = at + b$ où $a = \frac{Cov(t,C)}{V(t)} = \frac{Cov(t,C)}{\sigma_t^2}$ et $b = \bar{C} - a.\bar{t}$ .La calculatrice affiche $a = 23{,}19$ et $b = 1{,}68$.

La droite de régression de C en t est d'équation $y=23;19x+1,68$.

d) Pour $t=188; C=23,19\times188+1,68=4361$ (arrondi à l'unité).

2/ a) $C=\alpha t+40\beta+754$.

b) D'après **1/**c), on a $\alpha=23,19$ et $40\beta+754=1,68$ donc $\beta=\dfrac{1,68-754}{40}=-18,808$.

3/ $t=188$ cm et $g=50 \Rightarrow C=23,19.188-18,808.50+754$ Soit alors $C=4173\text{ cm}^3$ (arrondi à l'unité).

Exercice 4

1/ a) On peut écrire $f(x)=x+\left(-\dfrac{1}{x}\right).\ln x$.

- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ donc $\lim\limits_{0^+}f=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$.

b) Il s'agit d'interpréter graphiquement les résultats de **1/**a).

- $\lim\limits_{0^+}f=+\infty$ donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
- $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ donc la droite $\Delta: y=x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

c) La position de (C) par rapport à la droite $\Delta: y=x$ dépend du signe de $f(x)-x=-\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$ donc du signe de $-\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	
(C) est	‖	au-dessus de Δ		au-dessous de Δ	

(C) coupe au point $(1,1)$.

2/ a) $\forall x>0, f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln x.1}{x^2}=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}$.

b) Pour $x\in]0,1[, x^2-1<0$ et $\ln x<\ln1=0$.

Pour $x\in]1,+\infty[, x^2-1>0$ et $\ln x>\ln1=0$.

On peut donc affirmer que x^2-1 et $\ln x$ ont le même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

c) D'après **2/**b), le signe de $f'(x)$ est celui de x^2-1 donc on a le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

d) Soit $N(x)=x^2-1+\ln x$. On a $f'(x)=0\Leftrightarrow N(x)=0$.

$N'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$ d'où le tableau de variation ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$N(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

La fonction N est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $N(x)=0$ admet une unique solution et comme $N(1)=0$ alors 1 est l'unique solution de l'équation $N(x)=0$ donc de $f'(x)=0$.

e) Tableau de variation de la fonction *f*.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3/ a) $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C) en un point d'abscisse a.

La tangente est parallèle à $\Delta : y=x$ équivaut à $f'(x)=1 \Leftrightarrow a^2-1+\ln a=a^2 \Leftrightarrow \ln a=1 \Leftrightarrow a=e$.

$f(e)=e-\dfrac{1}{e}$.

La courbe (C) admet donc au point $B\left(e,e-\dfrac{1}{e}\right)$ la seule tangente D parallèle à la droite $\Delta : y=x$.

b) $D: y=1.(x-e)+e-\dfrac{1}{e}$ donc $D: y=x-\dfrac{1}{e}$.

4/ a) A l'aide du compas et étant connue la distance $\dfrac{1}{e}$, on place le point $A\left(\dfrac{1}{e},0\right)$.

$x_A-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}=0=y_A$ donc $A\in D$.

b) D est la droite passant par le point A et parallèle à Δ.

B est le point de la droite D d'abscisse e.

c) Voir schéma.

5/ $\mathscr{A}=\int_{1/e}^{e}|f(x)-x|dx=\int_{1/e}^{1}(f(x)-x)dx+\int_{1}^{e}(x-f(x))dx=$

$\int_{1/e}^{1}-\dfrac{1}{x}.\ln x.dx+\int_{1}^{e}\dfrac{1}{x}.\ln x.dx=\left[-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{1/e}^{1}+\left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{1}^{e}=1$ u.a