Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre C et de rayon 2

1) a) Vérifier que $B \in \mathscr{C}$
   b) Placer les points A et C puis construire le point B
2) a) Ecrire z_A sous forme exponentielle
   b) Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique
   c) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$
   d) En déduire la forme exponentielle de z_B et déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tel que $|z| = |\bar{z} - 1 - i|$
4) Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -3i\left(\frac{z-1+i}{z-2}\right)$
   a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' soit réel
   b) Montrer que $OM' = 3\frac{AM}{CM}$
   c) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de $[AC]$, le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points B et C d'affixes respectifs $-i$ et $-2i$. A tout point M d'affixe $z \neq -i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+2i}{1-iz}$

1) a) Vérifier que pour $z \neq -i$, $-iz' = \frac{z+2i}{z+i}$
   b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que z' soit réel
2) a) Montrer que $|z'| = \frac{CM}{BM}$
   b) En déduire l'ensemble des points M lorsque le point M' varie sur le cercle trigonométrique
3) Soit $w = \frac{z'-i}{z-i}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$
   a) Vérifier que pour tout nombre complexe z, $(z-i)(1-iz) = -i(z^2+1)$
   b) En déduire que $w = -\frac{1}{z^2+1}$
4) On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
   a) Vérifier que $w = \frac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$
   b) En déduire le module et un argument de w en fonction de θ

Exercice 3

1) Montrer que pour tous réels α et β on a : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$
2) Donner la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$, $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

Exercice 4

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z^2-4}{2z}$

1) a) Montrer que pour $z \neq 2i$, $\frac{z'+2i}{z'-2i} = \left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^2$
   b) On désigne par A et B les points d'affixes respective $2i$ et $-2i$

Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}}\right)=2\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$ et $\frac{M'B}{M'A}=\left(\frac{MB}{MA}\right)^2$

c) En déduire l'ensemble des points M du plan pour lesquels z' est un imaginaire pure

2) Soit I le point d'affixe $z_I=-4+2i$

a) Déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)$ et $\frac{IB}{IA}$

b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}=\{M(z)\in\mathscr{P}\setminus |z+2i|=2|z-2i|\}$

c) En utilisant les questions précédentes, construire le point $I'=f(I)$

Exercice 5

1) a) Vérifier que : $(1+\sqrt{3}+2i)^2=2\sqrt{3}+4i(1+\sqrt{3})$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(3+\sqrt{3})z+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-i)=0$ et mettre les solutions sous forme algébrique

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm) on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives $z_A=1-i$, $z_B=2+\sqrt{3}+i$ et $z_\Omega=2$

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon 2

a) Vérifier que $B\in\mathscr{C}$

b) Placer les points A et Ω

c) Construire alors le point B

3) a) Ecrire z_A sous forme exponentielle

b) Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique

c) Montrer que $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

d) En déduire la forme exponentielle de z_B

4) Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 6

1) a) Calculer $(1+2i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z suivante : $z^2+i\sqrt{3}z-i=0$

2) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On considère l'équation : $(E_\theta): z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0$

a) Vérifier que $(\cos\theta+i)^2=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ)

3) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1=i$, $z_2=\cos\theta+(1-\sin\theta)i$ et $z_3=-\cos\theta-(1+\sin\theta)i$

a) Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle

b) Déterminer le réel θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour que A, B et C soient alignés

c) Déterminer le réel θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O. Quel est le rayon de ce cercle ?

Exercice 7

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(1+i)z+i=0$

b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle

2) On considère l'équation $(E_\theta): z^2-2e^{i\theta}z\cos\theta+e^{2i\theta}=0$, $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E_θ)

b) Trouver l'autre solution de (E_θ)

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$

a) Déterminer l'affixe du point C tel que OMCM' soit un losange

b) Déterminer le réel θ pour que l'aire du losange OMCM' soit égale à 1

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2z + 4 = 0$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2ie^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_C = 2(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$

   a) Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle

   b) Construire les points A et B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

   c) Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O

   d) Montrer que $z_C = z_A + z_B$ et en déduire que OACB est un carrée

3) Soit M le point d'affixe $z_M = e^{2i\theta} + 1$ où $\theta \in [0, \pi]$

   a) Vérifier que $z_M = 2e^{i\theta}\cos\theta$

   b) Déterminer la valeur de θ pour que O, A et M soit alignés

Exercice 9

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): iz^2 - z\sqrt{3} - i = 0$

   b) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle

2) On considère l'équation $(E_\theta): iz^2 + 2z\sin\theta - 2i(1+\cos\theta) = 0$ où $\theta \in]0, \pi[$

   a) Vérifier que $\sin^2\theta - 2(1+\cos\theta) = [(1+\cos\theta)i]^2$

   b) Résoudre l'équation (E_θ)

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points M et N d'affixes respectifs $z_M = 1 + e^{i\theta}$ et $z_N = -1 + e^{i(\theta+\pi)}$

   a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $]0, \pi[$

   b) Vérifier que $z_M = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_N = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

   c) Quelle est la nature du triangle OMN pour tout $\theta \in]0, \pi[$

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$ et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta): z^2 - (2 + e^{i\theta})z + 1 + e^{i\theta} = 0$ où $\theta \in]0, \pi[$

2) Soit B et E les points d'affixes respectifs $z_B = 1 + e^{i\theta}$ et $z_E = 1 + z_B^2$

   a) Montrer que B appartient au cercle $\mathscr{C}$

   b) Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

   c) En déduire que $\dfrac{z_E - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel puis interpréter géométriquement ce résultat

3) Dans la suite on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$

   a) Donner la forme algébrique de z_B

   b) Construire les points B et E

Exercice 11

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E): z^2 - (3 - i)z + 4 = 0$

1) a) Calculer $(1 - 3i)^2$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}$

   a) Donner la forme algébrique de z_B

   b) Placer les points A et B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

3) Ecrire sous forme exponentielle z_A et $\frac{z_B}{z_A}$ puis en déduire la nature du triangle OAB

4) Soit M le point du plan d'affixe $z_M = 3 + i\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de α pour laquelle le triangle AMB est rectangle en M

Exercice 12

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2iz - 2 = 0$
   b) Mettre les solutions sous forme exponentielle
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} - 1 = 0$ où θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$
3) On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_1 = 2e^{i\theta}$, $z_2 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_3 = -1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]0, \pi[$
   a) Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle
   b) Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle
   c) Pour quelles valeurs de θ, OBAC est un carré ?

Exercice 13

1) Soit l'équation $(E): z^2 - (2 + 3i)z - 2 + 2i = 0$
   a) Ecrire sous forme algébrique $(2 + i)^2$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
2) Soit l'équation $(E'): z^3 - (3 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 4i = 0$
   a) Vérifier que $(1 - i)$ est une solution de (E')
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E')
3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = 2 + 2i$
   a) Placer les points A, B et C
   b) Calculer les distances AB, AC et BC
   c) En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2z + 4 = 0$
   b) Exprimer les solutions de (E) sous forme exponentielle.
2) On donne les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i\sqrt{3}$, 2 et $1 - i\sqrt{3}$
   a) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O
   b) Placer les point A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$
   c) Montrer que le quadrilatère OABC est un losange
3) Soit z un nombre complexe distinct de 1 et $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$
   a) Montrer que $z = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
   b) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $(E'): \left(\frac{2z+2}{z-1}\right)^2 - 2\left(\frac{2z+2}{z-1}\right) + 4 = 0$

Exercice 15

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1cm).

1) On considère l'équation $(E): z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$
   a) Montrer que $(-i)$ est une solution de (E)
   b) Déterminer les réels a, b et c tels que : $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$
   c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a = 4 + i$, $b = 4 - i$ et $c = -i$
   a) Faire une figure
   b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B
   c) Déterminer l'affixe de Ω milieu du segment $[AC]$
3) Soit D le point d'affixe $d = 3 - 2i$
   Montrer que A,B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera

Exercice 16

Partie A

1) Vérifier que $(3+i)$ est une racine carrée complexe de $(8+6i)$
2) On considère l'équation $(E): z^3-(1+4i)z^2-3z-1-8i=0$
   a) Vérifier que $(-i)$ est une racine de (E)
   b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :
   $$z^3-(1+4i)z^2-3z-1-8i=(z+i)(az^2+bz+c)$$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+5i)z-8+i=0$
4) Résoudre (E)

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1cm).

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_1=2+3i$, $z_2=-1+2i$, $z_3=-i$ et $z_4=3$

1) Placer A, B, C et D dans le plan complexe.
2) Soit $Z=\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$
   a) Interpréter géométriquement le module et l'argument de Z
   b) Ecrire Z sous forme algébrique et exponentielle
   c) En déduire la nature du triangle ABC et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$
3) Montrer que ABCD est un carré.

Exercice 17

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=1+2i$, $z_B=1+\sqrt{3}+i$, $z_C=1+\sqrt{3}-i$ et $z_D=1-2i$

1) Montrer que ABCD est un trapèze
2) Vérifier que $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=i\sqrt{3}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?
3) a) Prouver que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on déterminera
   b) Placer les points A, B, C et D
4) On considère l'équation $(E): z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$ où θ désigne un réel quelconque.
   a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$
   b) Montrer que les images des solutions de (E) appartiennent au cercle Γ

Exercice 18

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z\sqrt{2}+4=0$
   b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle
2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ et $c=-2$. On désigne par z le nombre complexe définie par $z=\dfrac{a-c}{b-c}$
   a) Placer les points A, B et C sur une figure
   b) Interpréter géométriquement le module et un argument de z
   c) Ecrire z sous forme algébrique puis sous forme exponentielle
   d) En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$

Exercice 19 Session de contrôle 2009 [Section Sciences Techniques]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Vérifier que $8-6i=(3-i)^2$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2+(1+i)z-2(1-i)=0$
2) Soit θ un réel de $[0,\pi]$. On considère l'équation $(E_\theta): z^2+(1+e^{i\theta})z-2(1-e^{i\theta})=0$
   a) Vérifier que (-2) est une solution de (E_θ)
   b) Déterminer l'autre solution de (E_θ)
3) Soit A et M_θ les points d'affixes respectives -2 et $1-e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$
   a) Calculer AM_θ en fonction de θ

b) Déterminer la valeur de θ de $[0,\pi]$ pour laquelle AM_n est maximale

Exercice 20 Session de contrôle 2004

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$
   b) Ecrire les solution trouvés sous forme exponentielle
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-\sqrt{3}\,z^2+1=0$

2) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
   a) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(2\sin\theta)z+1=0$. Vérifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ sont les solutions de (E)
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(2\sin\theta)z^2+1=0$

Exercice 21 Session de contrôle 2014

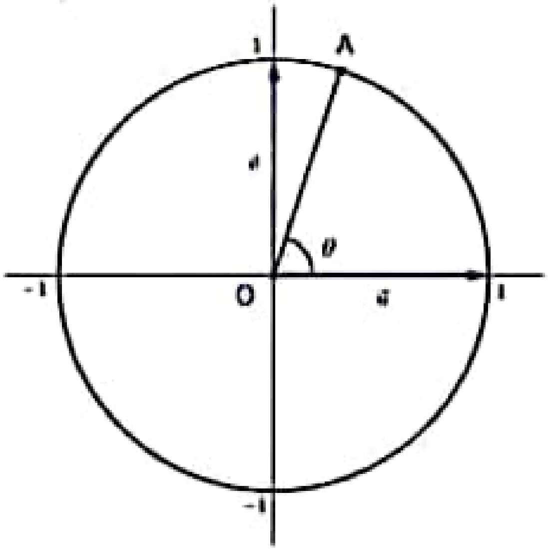
On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): 2z^2-\sqrt{2}(1-i)z-2i=0$

1) a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $6(1+i)^2$
   b) Résoudre l'équation (E)

2) a) Donner l'écriture exponentielle de $1-i$
   b) Vérifier que pour tout nombre complexe z, $2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2-\sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)-2i=-2i(z^2-z+1)$
   c) Montrer que les solution de l'équation $z^2-z+1=0$ sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$
   d) En déduire une écriture exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E)
   e) Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 22 Session de contrôle 2016

Dans la figure ci-après, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et d'ordonnée positive. On note a l'affixe de A.



1) Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$
   a) Donner, en fonction de θ, l'écriture exponentielle des nombres complexes a, $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$
   b) Construire les points B, C et D d'affixes respectives $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$

2) a) Justifier que $a+\bar{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
   b) Montrer que a et $\bar{a}$ sont les solutions de l'équation $(E): z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1=0$

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z, $z^5-1=(z-1)\left[z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right]\left[z^2+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)z+1\right]$
   b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité

4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1

b) Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives

c) En déduire que $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

5) Soit I le point d'affixe 1. Montrer que les points I, A, C, D et B sont les sommets d'un pentagone régulier

Exercice 23 Session principale 2018

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 - iz\sqrt{3} - 1 = 0$ (On donnera les solutions sous forme exponentielle)
2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}z^3 - 18z^2 + 7i\sqrt{3}z + 3$
   a) Vérifier que $P(i\sqrt{3}) = 0$ et $P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$
   b) Montrer que tout nombre complexe non nul z, $P\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^4}P(z)$
   c) En déduire que les nombres $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$
3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectifs $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{\frac{2i\pi}{3}}$
   a) Construire les points A, B et C
   b) Construire le point D défini par $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et donner son affixe sous forme cartésienne
   c) La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (OD) au point E. déterminer l'affixe du point E

Exercice 24 Session principale 2016

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

1) a) Construire, dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A et B
   b) Ecrire a et b sous forme algébrique
2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C
   a) Déterminer l'affixe c du point C
   b) Vérifier que $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$
3) On considère le point D d'affixe c^2
   a) Montrer que OD = 5
   b) En déduire une construction du point D
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - 2z - i\sqrt{6} = 0$. On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et z_2 l'autre solution
5) Soit les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2
   a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment [IC]
   b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme
   c) Construire les points M_1 et M_2

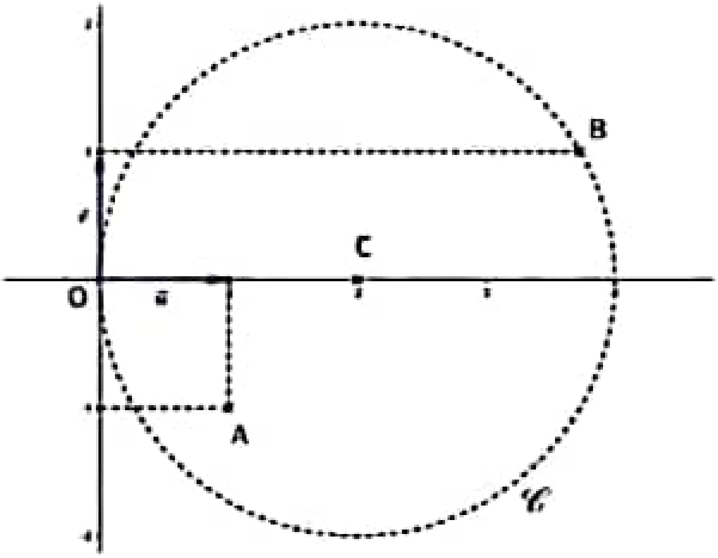
Nombres complexes

Corrigés 2018 - 2019
Lycée secondaire cité Erriadh Sousse

Exercice 1

1) a) $CB = |z_B - z_C| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{4} = 2$ donc $B \in \mathscr{C}$

b) B est le point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée égale à 1 dont l'abscisse est supérieur à 2



2) a) $z_A = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+\sqrt{3}+i+2i+i\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2} = (1+\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

d) $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z_B = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} z_A = (1+\sqrt{3})\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) $|z| = |\bar{z} - 1 - i| \Leftrightarrow |z| = |\overline{z-1+i}| = |z-1+i| \Leftrightarrow |z| = |z - z_A| \Leftrightarrow OM = AM$ donc l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z| = |\bar{z} - 1 - i|$ est la médiatrice du segment $[OA]$

4) a) Pour $z \neq 2$, $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3i\left(\frac{z-1+i}{z-2}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\frac{z-1+i}{z-2}\right) = \left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = \frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{CM}}}$ est imaginaire $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM}$

L'ensemble des points $M(z)$ tel que z' soit réel est le cercle de diamètre $[AC]$ privé de C

b) $OM' = |z'| = \left|3i\left(\frac{z-1+i}{z-2}\right)\right| = |3i| \times \left|\frac{z-1+i}{z-2}\right| = 3\left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right| = 3\frac{|z-z_A|}{|z-z_C|} = 3\frac{AM}{CM}$

c) M appartient à la médiatrice de $[AC] \Leftrightarrow AM = CM \Leftrightarrow OM' = 3$
donc lorsque M décrit la médiatrice de $[AC]$, M' décrit le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayon 3

Exercice 2

1) a) Pour $z \neq -i$, $-iz' = -i\left(\frac{z+2i}{1-iz}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{z+2i}{1-iz}\right) = \frac{z+2i}{z+i}$

b) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -iz'$ est imaginaire $\Leftrightarrow \frac{z+2i}{z+i} = \frac{z-z_C}{z-z_B} = \frac{z_{\overrightarrow{CM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}$ est imaginaire $\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{BM}$

L'ensemble des points M du plan tels que z' soit réel est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de B

2) a) $|z'| = |-i| \times |z'| = |-iz'| = \left|\frac{z+2i}{z+i}\right| = \left|\frac{z+2i}{z+i}\right| = \frac{|z+2i|}{|z+i|} = \frac{|z-z_C|}{|z-z_B|} = \frac{CM}{BM}$

b) $M' \in \mathscr{C}_{(O,1)} \Leftrightarrow OM' = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{CM}{BM} = 1 \Leftrightarrow CM = BM$
L'ensemble des points M lorsque le point M' varie sur le cercle trigonométrique est donc la médiatrice du segment $[BC]$

3) a) $(z-i)(1-iz)=z-iz^2-i-z=-i(z^2+1)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$

b) Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$, $w=\dfrac{z'-i}{z-i}=\dfrac{\dfrac{z+2i}{1-iz}-i}{z-i}=\dfrac{\dfrac{z+2i-i-z}{1-iz}}{z-i}=\dfrac{i}{(z-i)(1-iz)}=\dfrac{i}{-i(z^2+1)}=-\dfrac{1}{z^2+1}$

4) a) $w=-\dfrac{1}{z^2+1}=-\dfrac{1}{e^{2i\theta}+1}=\dfrac{-e^{-i\theta}}{(e^{2i\theta}+1)e^{-i\theta}}=\dfrac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$

b) $w=\dfrac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\left(-\dfrac{1}{2}e^{-i\theta}\right)\left(\dfrac{2}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right)=-\dfrac{1}{2\cos\theta}e^{-i\theta}=\dfrac{1}{2\cos\theta}e^{i(\pi-\theta)}$

$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\theta\geq 0$ et par suite $|w|=\left|-\dfrac{1}{2\cos\theta}e^{-i\theta}\right|=\dfrac{1}{2\cos\theta}$ et $\arg(w)\equiv\pi-\theta\,[2\pi]$

Exercice 3

1) Il suffit de remarquer que $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=\alpha$ et $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=\beta$

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]}+e^{i\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]}=2e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left[\frac{e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}{2}\right]=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]}-e^{i\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]}=2ie^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left[\frac{e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}{2i}\right]=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

2) $z_1=\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta-i\sin\theta)=e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\theta}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$\theta\in\,]-\pi,\pi[\;\Leftrightarrow -\pi<\theta<\pi\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)>0$

$z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta=1+e^{i\theta}=e^{2i\pi}+e^{i\theta}=2\cos\left(\dfrac{2\pi-\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{2\pi+\theta}{2}\right)}=-2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi}=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

$z_3=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}=\dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}e^{-i\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta}{2}\right)}$

Exercice 4

1) a) Pour $z\neq 2i$, $\left(\dfrac{z+2i}{z-2i}\right)^2=\dfrac{(z+2i)^2}{(z-2i)^2}=\dfrac{z^2+4iz-4}{z^2-4iz-4}=\dfrac{\dfrac{z^2-4+4iz}{2z}}{\dfrac{z^2-4-4iz}{2z}}=\dfrac{\dfrac{z^2-4}{2z}+2i}{\dfrac{z^2-4}{2z}-2i}=\dfrac{z'+2i}{z'-2i}$

b) $\arg\left[\left(\dfrac{z+2i}{z-2i}\right)^2\right]\equiv 2\arg\left(\dfrac{z+2i}{z-2i}\right)[2\pi]\equiv 2[\arg(z+2i)-\arg(z-2i)][2\pi]$

$\equiv 2[\arg(z+2i)-\arg(z-2i)][2\pi]$

$\equiv 2[\arg(z-z_B)-\arg(z-z_A)][2\pi]$

$\equiv 2\left[(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})-(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})\right][2\pi]$

$\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}})[2\pi]$

$\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})[2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z'+2i}{z'-2i}\right)\equiv\arg(z'+2i)-\arg(z'-2i)[2\pi]\equiv\arg(z'-z_B)-\arg(z'-z_A)[2\pi]$

$\equiv(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})-(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}})[2\pi]$

$\equiv(\widehat{\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'}})[2\pi]$

$\equiv(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}})[2\pi]$

et par suite $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}})\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})[2\pi]}$

$\left|\left(\dfrac{z+2i}{z-2i}\right)^2\right|=\left|\dfrac{z+2i}{z-2i}\right|^2=\left(\dfrac{|z+2i|}{|z-2i|}\right)^2=\left(\dfrac{|z-z_B|}{|z-z_A|}\right)^2=\left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2$

$\left|\dfrac{z'+2i}{z'-2i}\right|=\dfrac{|z'+2i|}{|z'-2i|}=\dfrac{|z'-z_B|}{|z'-z_A|}=\dfrac{M'B}{M'A}$ donc $\boxed{\dfrac{M'B}{M'A}=\left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2}$

c) z' est un imaginaire pure $\Leftrightarrow$ M', A et B sont alignés $\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}}\right) = 0[\pi]$

$$\Leftrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = 0[\pi]$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux ou colinéaires.

L'ensemble des points M du plan pour lesquels z' est un imaginaire pure est donc la réunion du cercle de diamètre $[AB]$ avec l'axe des ordonnées privé de O

2) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{IA},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IB}}\right)[2\pi] = \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IB}}\right) - \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IA}}\right)[2\pi] = \arg(z_B - z_I) - \arg(z_A - z_I)[2\pi]$

$$= \arg(4-4i) - \arg(4)[2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\frac{IB}{IA} = \frac{|z_B - z_I|}{|z_A - z_I|} = \frac{|4-4i|}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

b) $|z+2i| = 2|z-2i| \Leftrightarrow |z - z_B| = 2|z - z_A| \Leftrightarrow MB = 2 \times MA$

$$\Leftrightarrow MB^2 = 4 \times MA^2$$

$$\Leftrightarrow MB^2 - 4 \times MA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{ME}\cdot\left(3\overrightarrow{MF}\right) = 0$ où E est le barycentre des points pondérés $(A,-2)$ et $(B,1)$ et F le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,1)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MF}$$

L'ensemble $\mathscr{C} = \{M(z) \in \mathscr{P} \setminus |z+2i| = 2|z-2i|\}$ est le cercle de diamètre $[EF]$

E est le barycentre des points pondérés $(A,-2)$ et $(B,1)$ donc $-2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OE}$

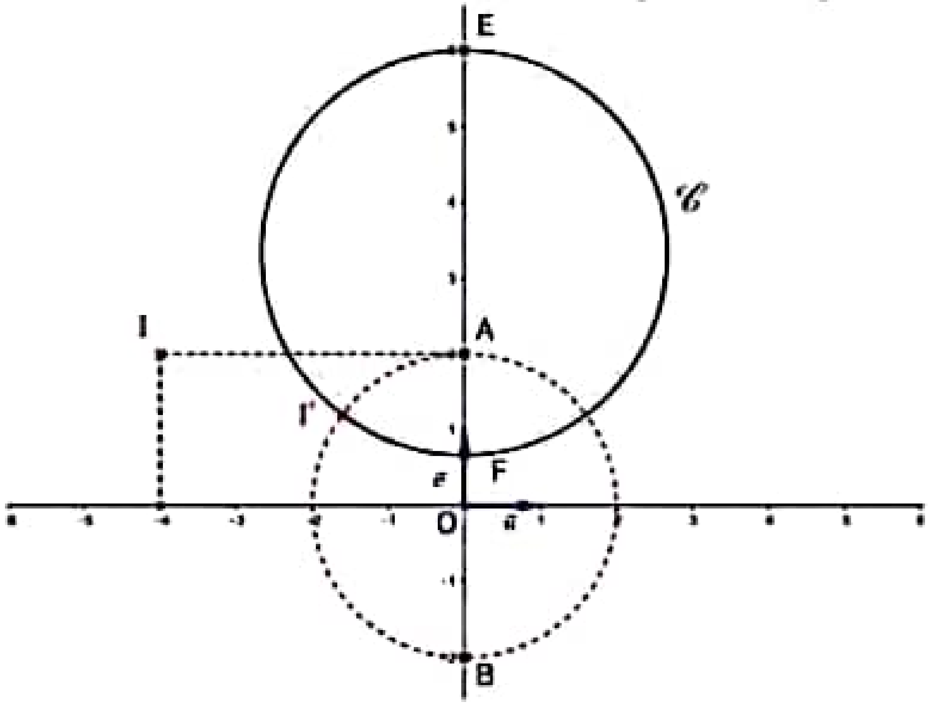
donc $-z_E = -2z_A + z_B = -4i - 2i = -6i$

donc $z_E = 6i$

F le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,1)$ donc $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OF}$

donc $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

donc $z_F = \frac{1}{3}(2z_A + z_B) = \frac{2}{3}i$



c) $I' = f(I)$ donc d'après 1) b) $\dfrac{I'B}{I'A} = \left(\dfrac{IB}{IA}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ donc $I'B = 2I'A$ et par suite $I' \in \mathscr{C}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{I'A},\overrightarrow{I'B}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc I' appartient au cercle de diamètre $[AB]$

Exercice 5

1) a) $(1+\sqrt{3}+2i)^2 = (1+\sqrt{3})^2 + 4i(1+\sqrt{3}) - 4 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 4i(1+i\sqrt{3}) - 4 = 2\sqrt{3} + 4i(1+\sqrt{3})$

b) $z^2 - (3+\sqrt{3})z + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-i) = 0$

$\Delta = (3+\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-i) = 9 + 6\sqrt{3} + 3 - 4(3 - i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i) = 2\sqrt{3} + 4i(1+\sqrt{3})$

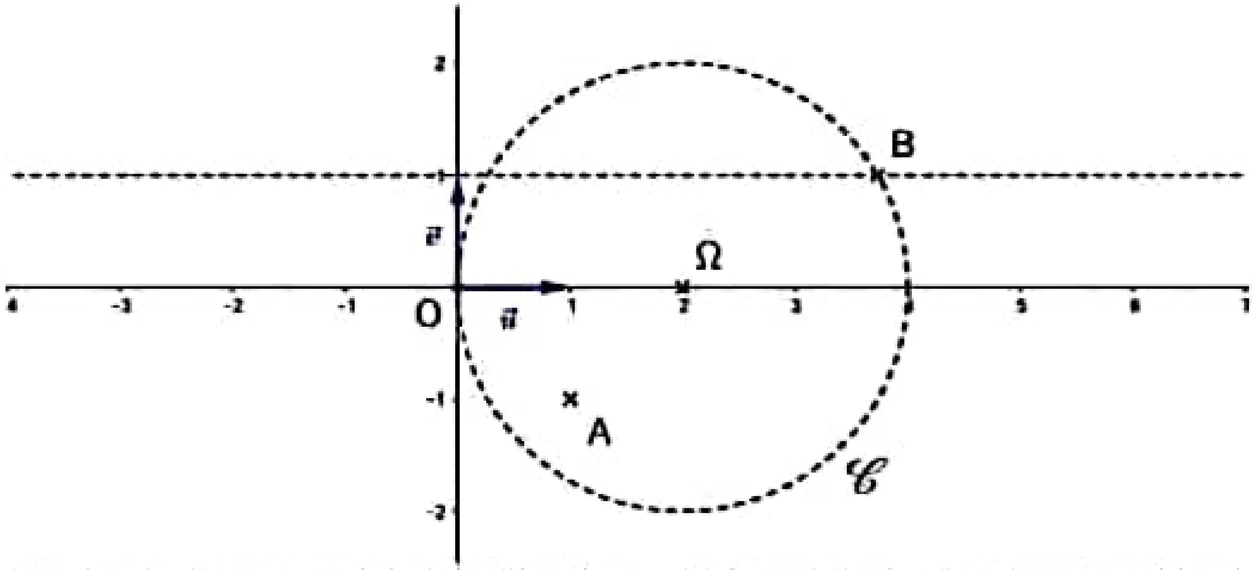
donc $\delta = 1 + \sqrt{3} + 2i$ est une racine carrée complexe de Δ

$z_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3}+2i)}{2} = 1 - i$ et $z_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3}+2i)}{2} = 2 + \sqrt{3} + i$

$S_{\mathbb{C}} = \{1-i, 2+\sqrt{3}+i\}$

2) a) $B\Omega = |z_B - z_\Omega| = |\sqrt{3}+i| = 2$ donc $B \in \mathscr{C}$

b)



c) B est le point d'intersection de la droite d'équation $y = 1$ et le cercle $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est supérieur à 2

3) a) $z_A = 1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2+\sqrt{3}+i}{1-i} = \dfrac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2+\sqrt{3}+i+2i+i\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}$

c) $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2} = (1+\sqrt{3})\left[\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right] = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

d) $z_B = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} z_A = (1+\sqrt{3})\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}}$

4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{z_B}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 6

1) a) $(1+2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$

b) $z^2 + i\sqrt{3}z - i = 0 \qquad \Delta = (i\sqrt{3})^2 - 4(-i) = 4i - 3 = (1+2i)^2$

$z' = \dfrac{-i\sqrt{3}-1-2i}{2} = \dfrac{-1-(2+\sqrt{3})i}{2}$ et $z'' = \dfrac{-i\sqrt{3}+1+2i}{2} = \dfrac{1+(2-\sqrt{3})i}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{-1-(2+\sqrt{3})i}{2}, \dfrac{1+(2-\sqrt{3})i}{2}\right\}$

2) a) $(\cos\theta + i)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta - 1 = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$

b) $\Delta = (2i\sin\theta)^2 - 4(-2i\cos\theta) = -4\sin^2\theta + 8i\cos\theta = 4(-\sin^2\theta + 2i\cos\theta) = [2(\cos\theta + i)]^2$

$$z' = \frac{-2i\sin\theta - 2(\cos\theta + i)}{2} = -i\sin\theta - \cos\theta - i = -\cos\theta - (1+\sin\theta)i$$

$$z'' = \frac{-2i\sin\theta + 2(\cos\theta + i)}{2} = -i\sin\theta + \cos\theta + i = \cos\theta + (1-\sin\theta)i$$

donc $S_E = \{-\cos\theta - (1+\sin\theta)i, \cos\theta + (1-\sin\theta)i\}$

3) a) $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{4}$ et par suite $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \ge 0$ et $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \ge 0$

$$\begin{aligned} z_2 = \cos\theta + (1-\sin\theta)i = \cos\theta - i\sin\theta + i = e^{-i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} &= e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 = -\cos\theta - (1+\sin\theta)i = -\cos\theta - i\sin\theta - i = -\left(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right) &= -\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\ &= -e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\ &= -2e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{2}\right) \\ &= -2e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{z_{AC}}{z_{AB}} = \frac{z_1 - z_A}{z_2 - z_A} = \frac{-\cos\theta - i(2+\sin\theta)}{\cos\theta - i\sin\theta} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(-\cos\theta - i(2+\sin\theta)) \\ &= -\cos^2\theta - i\cos\theta\sin\theta - i\cos\theta(2+\sin\theta) + \sin\theta(2+\sin\theta) \\ &= -\cos^2\theta + \sin\theta(2+\sin\theta) - i(\cos\theta\sin\theta + \cos\theta(2+\sin\theta)) \\ &= -\cos^2\theta + \sin\theta(2+\sin\theta) - 2i\cos\theta(1+\sin\theta) \end{aligned}$$

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_{AC}}{z_{AB}}$ est réel $\Leftrightarrow \cos\theta(1+\sin\theta) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \text{ ou } 1 + \sin\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

c) $OB = |z_2| = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ et $OC = |z_1| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

B et C appartiennent à un cercle de centre O $\Leftrightarrow OB = OC$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \text{ (Impossible) ou } \theta = 0 \end{aligned}$$

Pour $\theta = 0$ les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon $OB = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

Exercice 7

1) a) $(E) : z^2 - (1+i)z + i = 0$

$1 + (-(1+i)) + i = 0$ donc les solutions de (E) sont $z' = 1$ et $z'' = i$

$S_E = \{1, i\}$

b) $z' = 1 = e^{2i\pi}$ et $z'' = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

2) a) $$\begin{aligned} 1 - 2e^{i\theta}\cos\theta + e^{2i\theta} = 1 + e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}\cos\theta = (e^{-i\theta} + e^{i\theta})e^{i\theta} - 2e^{i\theta}\cos\theta &= 2\left(\frac{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}{2}\right)e^{i\theta} - 2e^{i\theta}\cos\theta \\ &= 2\cos\theta e^{i\theta} - 2e^{i\theta}\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

donc 1 est une solution de (E_θ)

b) L'autre solution de (E_θ) est $e^{2i\theta}$

3) a) OMCM' est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{M'C}} = z_{\overrightarrow{OM}} \Leftrightarrow z_C - e^{2i\theta} = 1 \Leftrightarrow z_C = 1 + e^{2i\theta}$

Vérifions que OMCM' est un losange : $OM' = |e^{2i\theta}| = 1 = OM$ d'où le résultat.

b) L'aire du losange OMCM' est :

$$\frac{OC \times MM'}{2} = \frac{1}{2}|z_C| \times |e^{2i\theta} - 1| = \frac{1}{2}|1 + e^{2i\theta}| \times |e^{2i\theta} - 1| = \frac{1}{2}|(1 + e^{2i\theta})(1 - e^{2i\theta})|$$

$$= \frac{1}{2}|e^{4i\theta} - 1|$$

$$= \frac{1}{2}|e^{2i\theta}e^{2i\theta} - e^{2i\theta}e^{-2i\theta}|$$

$$= \frac{1}{2}|e^{2i\theta}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})|$$

$$= \frac{1}{2}\left|2ie^{2i\theta}\left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}|2ie^{2i\theta}\sin(2\theta)|$$

$$= |\sin(2\theta)| \times |i| \times |e^{2i\theta}|$$

$$= |\sin(2\theta)|$$

Donc l'aire du losange est égale à 1 $\Leftrightarrow |\sin(2\theta)| = 1 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = 1$ ou $\sin(2\theta) = -1$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $2\theta = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (à rejeter car $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)

Exercice 8

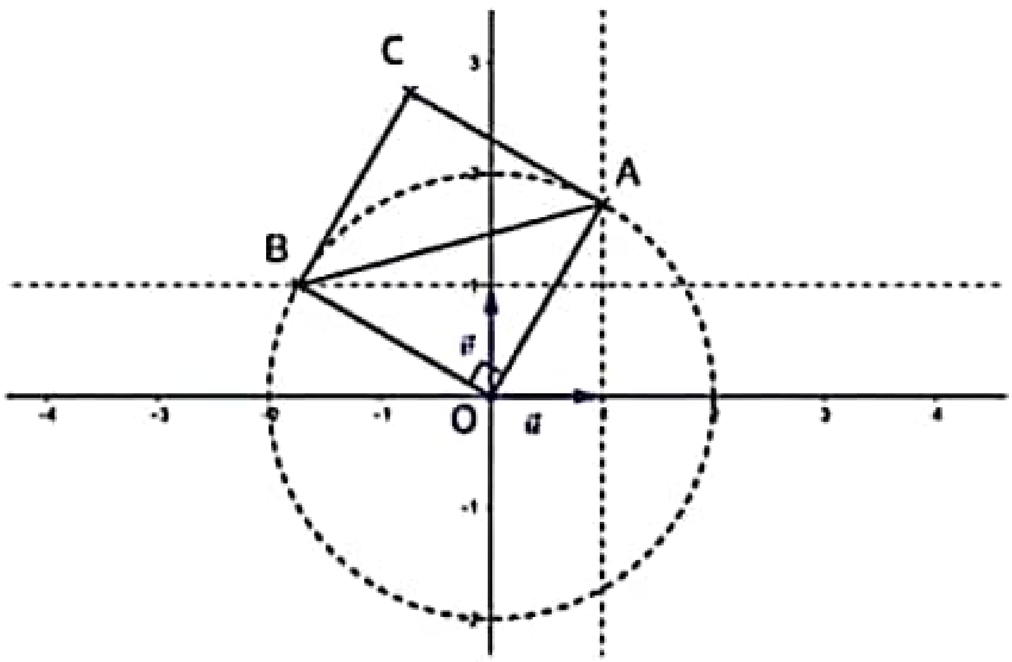
1) $(E) : z^2 - 2z + 4 = 0 \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$

$$z' = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \text{ et } z'' = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

$S_E = \{1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$

2) a) $z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = 2ie^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b)



c) $\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ est imaginaire donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

d'autre part $\frac{OB}{OA} = \frac{|z_B|}{|z_A|} = \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = |-i| = 1$ donc $OA = OB$ et par suite OAB est un triangle rectangle en O

d) $z_A + z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}} = z_C$

$z_A + z_B = z_C \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{OC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow$ OACB est un parallélogramme et comme OAB est rectangle isocèle alors OACB est un carrée

3) a) $z_M = e^{2i\theta} + 1 = e^{i\theta}e^{i\theta} + e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = 2e^{i\theta}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = 2e^{i\theta}\cos\theta$

b) $\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \frac{z_M}{z_A} = \frac{2e^{i\theta}\cos\theta}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}\cos\theta$

O, A et M soit alignés $\Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}$ est réel $\Leftrightarrow e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}\cos\theta$ est réel $\Leftrightarrow \sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d'autre part $0 \le \theta \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{3} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \le k\pi \le \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le k \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0$

O, A et M sont alignés si, et seulement si, $\theta = \frac{\pi}{3}$

Exercice 9

1) a) $\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4(-i)i = 3 - 4 = -1 = i^2$ donc $z' = \frac{\sqrt{3}-i}{2i} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z'' = \frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

b) $z' = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$z'' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2) a) $\left[(1+\cos\theta)i\right]^2 = -(1+\cos\theta)^2 = -\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right) = -\left(2+2\cos\theta-\sin^2\theta\right) = \sin^2\theta - 2(1+\cos\theta)$

b) $\Delta = (2\sin\theta)^2 - 4i\left(-2i(1+\cos\theta)\right) = 4\sin^2\theta - 8(1+\cos\theta) = 4\left[\sin^2\theta - 2(1+\cos\theta)\right] = \left[2(1+\cos\theta)i\right]^2$

$z' = \frac{-2\sin\theta - 2(1+\cos\theta)i}{2i} = -1-\cos\theta + i\sin\theta$

$z'' = \frac{-2\sin\theta + 2(1+\cos\theta)i}{2i} = 1+\cos\theta + i\sin\theta$

$S_{\mathbb{C}} = \{-1-\cos\theta + i\sin\theta, 1+\cos\theta + i\sin\theta\}$

3) a) $|z_M - 1| = |e^{i\theta}| = 1$ donc M appartient au cercle de centre $A(1) = (1,0)$

$\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}\right) \equiv \arg\left(z_{\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi] \equiv \arg(z_M - z_A)[2\pi] \equiv \arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta[2\pi]$ donc M décrit le demi-cercle de centre A et de rayon 1 qui se trouve au-dessus de l'axe des abscisses lorsque θ varie dans $]0,\pi[$

b) $z_M = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

$z_N = -1 + e^{i(\pi+\theta)} = e^{i\pi} + e^{i(\pi+\theta)} = e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$

c) $\frac{z_N}{z_M} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\pi+\theta}$ donc $\frac{ON}{OM} = \frac{|z_N|}{|z_M|} = \left|\frac{z_N}{z_M}\right| = \left|e^{i\pi+\theta}\right| = 1$ c'est-à-dire $OM = ON$ et par suite OMN est un triangle isocèle en O pour tout $\theta \in]0,\pi[$

Exercice 10

1) $\Delta = \left(2+e^{i\theta}\right)^2 - 4\left(1+e^{i\theta}\right) = 4 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta} - 4 - 4e^{i\theta} = e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2$

$z' = \frac{2+e^{i\theta}-e^{i\theta}}{2} = 1$ et $z'' = \frac{2+e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2} = 1+e^{i\theta}$ donc $S_{\mathbb{C}} = \{1, 1+e^{i\theta}\}$

(On peut remarquer aussi que $1-\left(2+e^{i\theta}\right)+1+e^{i\theta} = 0$ donc les solutions de (E) sont 1 et $1+e^{i\theta}$)

2) a) $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\theta}| = 1$ donc $B \in \mathscr{C}$

b) $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\theta}+1 = z_B$

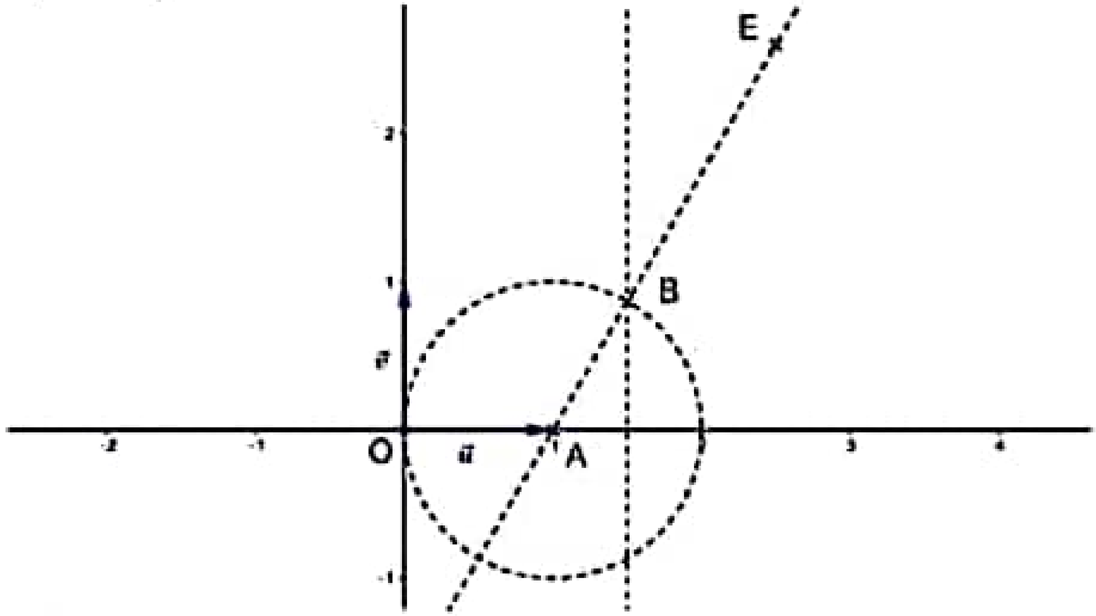
c) $\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_B^{\,2}}{e^{i\theta}} = \frac{\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2}{e^{i\theta}} = \frac{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un réel

$\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_{\overrightarrow{EA}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}$ est réel donc $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires et par suite les points A, B et E sont alignés

3) a) $z_B = 1 + e^{i\theta} = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) B est le point d'intersection de la droite $x = \frac{3}{2}$ et le cercle $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est positive

$\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_{\overrightarrow{EA}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$ donc $z_{\overrightarrow{EA}} = 3z_{\overrightarrow{BA}}$ donc $\overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{BA}$ ou encore $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$



Exercice 11

1) a) $(1-3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$

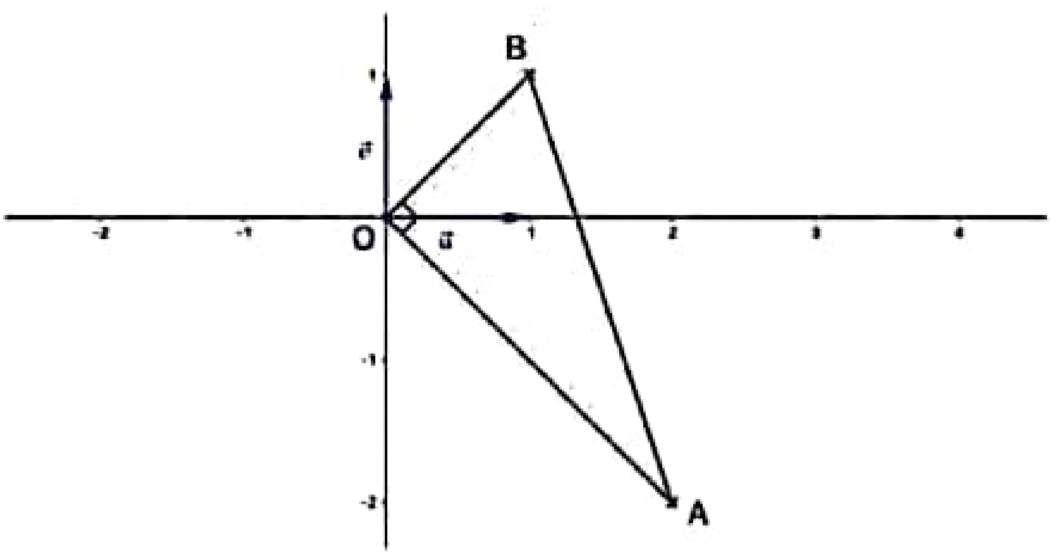
b) $\Delta = (3-i)^2 - 4\times 4 = 9 - 6i - 1 - 16 = -8 - 6i = (1-3i)^2$

$$z' = \frac{3-i-(1-3i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i \text{ et } z'' = \frac{3-i+(1-3i)}{2} = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

$S_{\mathbb{C}} = \{1+i, 2-2i\}$

2) a) $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = 1+i$

b)



3) $z_A = 2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$

$\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_{OB}}{z_{OA}} = \frac{1}{2}i$ est imaginaire pure donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ et par suite le triangle OAB est rectangle en O

4) AMB est rectangle en M $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \frac{z_{AM}}{z_{BM}}$ est imaginaire

$$\frac{z_{AM}}{z_{BM}} = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = \frac{3+i\alpha-2+2i}{3+i\alpha-1-i} = \frac{1+i(\alpha+2)}{2+i(\alpha-1)} = \frac{[1+i(\alpha+2)][2-i(\alpha-1)]}{[2+i(\alpha-1)][2-i(\alpha-1)]}$$
$$= \frac{2-i(\alpha-1)+2i(\alpha+2)+(\alpha+2)(\alpha-1)}{4+(\alpha-1)^2}$$
$$= \frac{2+\alpha^2+\alpha-2+i[-\alpha+1+2\alpha+4]}{4+(\alpha-1)^2}$$
$$= \frac{\alpha^2+\alpha+i(\alpha+5)}{4+(\alpha-1)^2}$$

$\frac{z_{AM}}{z_{BM}}$ est imaginaire $\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = -1$

Le triangle AMB est rectangle en M si, et seulement si, $\alpha = 0$ ou $\alpha = -1$

Exercice 12

1) a) $z^2 - 2iz - 2 = 0$

$\Delta = (-2i)^2 - 4\times(-2) = -4+8 = 4$ donc $z' = \frac{2i-2}{2} = i-1$ et $z'' = \frac{2i+2}{2} = i+1$

$S_{\mathbb{C}} = \{1-i, 1+i\}$

b) $z' = -1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z'' = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $\Delta = (-2e^{i\theta})^2 - 4(e^{2i\theta}-1) = 4e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} + 4 = 4$

$z' = \frac{2e^{i\theta}-2}{2} = e^{i\theta}-1$ et $z'' = \frac{2e^{i\theta}+2}{2} = e^{i\theta}+1$

$S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\theta}-1, e^{i\theta}+1\}$

3) a) $\theta \in]0,\pi[\Leftrightarrow 0 < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

$z_2 = 1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$z_3 = -1+e^{i\theta} = e^{i\pi}+e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}$$
$$= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}$$

b) $z_{OB} + z_{OC} = z_2 + z_3 = 1+e^{i\theta}-1+e^{i\theta} = 2e^{i\theta} = z_1 = z_{OA}$ donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et par suite OBAC est un parallélogramme

$\frac{z_{OB}}{z_{OC}} = \frac{z_2}{z_3} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est imaginaire donc $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$

et par suite OBAC est un rectangle

c) $\frac{OB}{OC} = \frac{|z_2|}{|z_3|} = \left|\frac{z_2}{z_3}\right| = \left|-i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$

OBAC est un carré $\Leftrightarrow OB = OC \Leftrightarrow \left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$ ou $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ car $\theta \in]0, \pi[$

Exercice 13

1) a) $(2+i)^2 = 4+4i-1 = 3+4i$

b) $(E): z^2 - (2+3i)z - 2 + 2i = 0$ $\quad \Delta = (2+3i)^2 - 4(-2+2i) = 4+12i-9+8-8i = 3+4i = (2+i)^2$

$z' = \frac{2+3i-(2+i)}{2} = i$ et $z'' = \frac{2+3i+(2+i)}{2} = 2+2i$

$S_E = \{i, 2+2i\}$

2) a) $(1-i)^3 = 1-3i+3i^2-i^3 = 1-3i-3+i = -2-2i$ et $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$

$(1-i)^3 - (3+2i)(1-i)^2 + 3(1+i)(1-i) - 4i = -2-2i+2i(3+2i)+6-4i = 4+6i-4-6i = 0$

donc $(1-i)$ est une solution de (E')

b) $(1-i)$ est une solution de (E') donc il existe deux nombres complexes a et b tels que :

$z^3 - (3+2i)z^2 + 3(1+i)z - 4i = (z-1+i)(z^2+az+b)$

$(z-1+i)(z^2+az+b) = z^3+az^2+bz-z^2-az-b+iz^2+aiz+bi$

$= z^3+(a-1+i)z^2+(b-a+ai)z-b+bi$

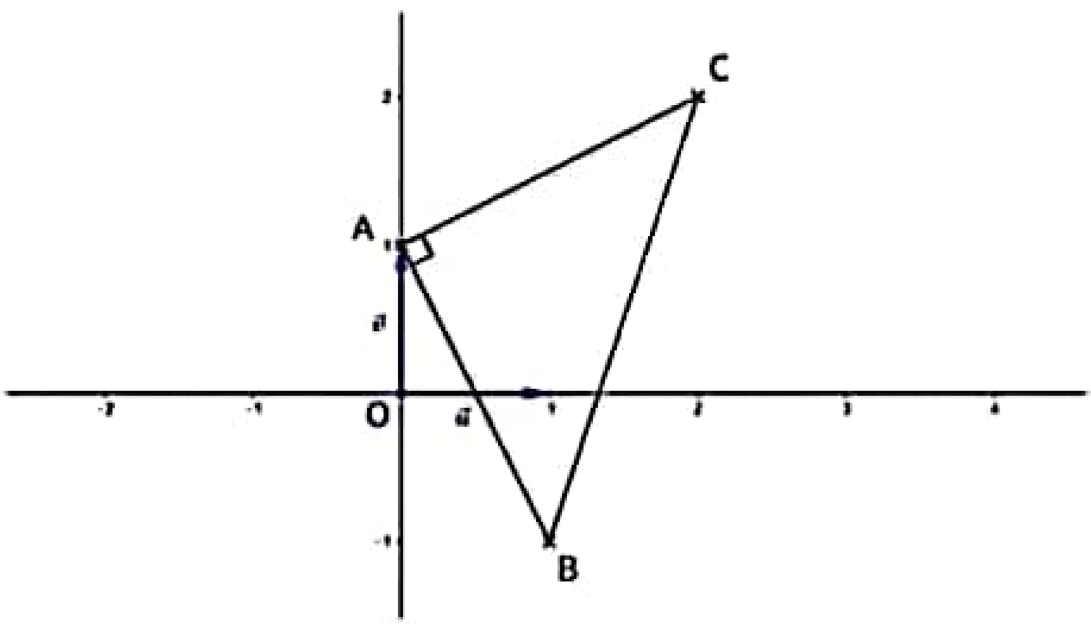
donc $\begin{cases} a-1+i = -(3+2i) \\ b-a-ai = 3(1+i) \\ -b+bi = -4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2-3i \\ b-a(1+i) = 3(1+i) \\ b(i-1) = -4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2-3i \\ b-a(1+i) = 3(1+i) \\ b = -\frac{4i}{i-1} = \frac{-4i(1+i)}{-2} = -2+2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2-3i \\ b = -2+2i \end{cases}$

donc $z^3 - (3+2i)z^2 + 3(1+i)z - 4i = (z-1+i)(z^2-(2+3i)z-2+2i)$

$(E') \Leftrightarrow (z-1+i)(z^2-(2+3i)z-2+2i) = 0 \Leftrightarrow z = 1-i$ ou $z = i$ ou $z = 2+2i$

$S_E = \{1-i, i, 2+2i\}$

3) a)



b) $AB = |z_B - z_A| = |1-2i| = \sqrt{5}$, $AC = |z_C - z_A| = |2+i| = \sqrt{5}$ et $BC = |z_C - z_B| = |1+3i| = \sqrt{10}$

c) $BC^2 = 10 = AB^2 + AC^2$ et $AB = AC$ donc ABC est rectangle isocèle en A

Exercice 14

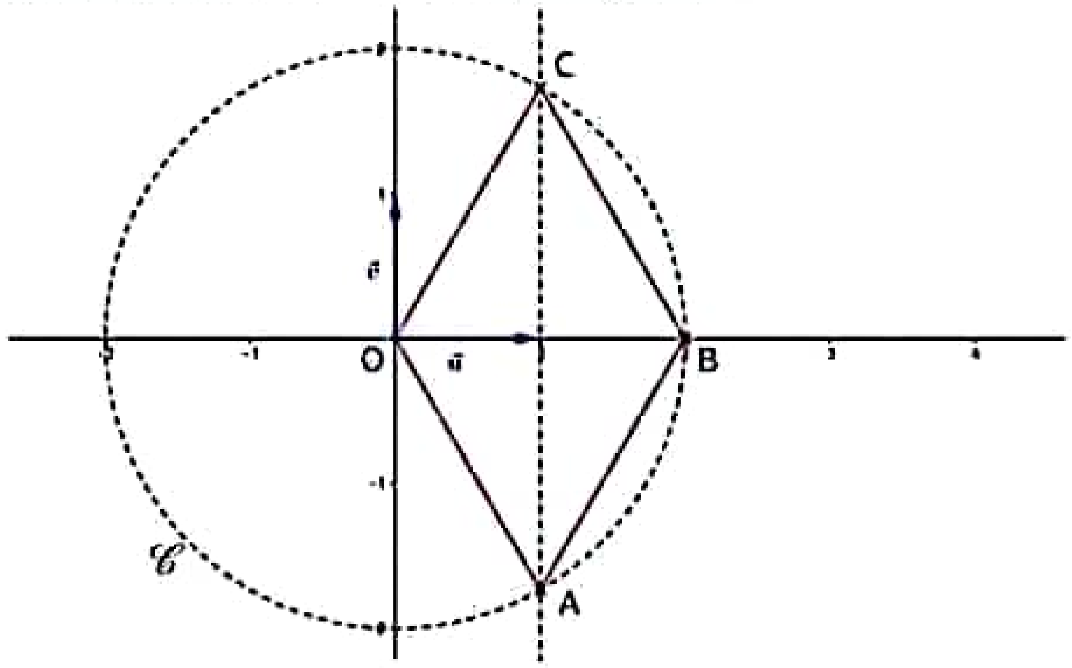
1) a) $\Delta = (-2)^2 - 4\times 4 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$ donc $z' = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = 1-i\sqrt{3}$ et $z'' = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$

$S_E = \{1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}\}$

b) $z' = 1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z'' = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) a) $OA = |z_A| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$, $OB = |z_B| = |1-i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ et $OC = |z_C| = 2$ donc $OA = OB = OC$ et par suite A, B et C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2

b) A et C sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $x = 1$



c) $z_{OA} = z_A = 1+i\sqrt{3}$ et $z_{CB} = z_B - z_C = 2-\left(1-i\sqrt{3}\right) = 1+i\sqrt{3} = z_{OA}$ donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ donc OABC est un parallélogramme

$OA = |z_A| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$ et $OB = |z_B| = \left|1-i\sqrt{3}\right| = 2 = OA$ donc OABC est un losange

3) a) $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z+1 = (z-1)e^{i\theta} \Leftrightarrow z+1 = ze^{i\theta} - e^{i\theta} \Leftrightarrow z - ze^{i\theta} = -1-e^{i\theta} \Leftrightarrow z\left(1-e^{i\theta}\right) = -1-e^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$$

donc $z = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}}{\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}\right)i} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -i\left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

b) $(E') : \left(\frac{2z+2}{z-1}\right)^2 - 2\left(\frac{2z+2}{z-1}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{2z+2}{z-1} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{2z+2}{z-1} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i}{\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} = i\sqrt{3} \text{ ou } z = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -i\sqrt{3}$$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\right\}$

Exercice 15

1) a) $(-i)^3 + (-8+i)\times(-i)^2 - (17-8i)i + 17i = i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0$ donc $(-i)$ est une solution de (E)

b) Comme $(-i)$ est solution de (E) alors on a :

$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2+bz+c)$

$= az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ic$

$= az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ic$

et par suite $a = 1$, $b + ai = -8 + i$, $c + bi = 17 - 8i$ et $ic = 17i$ ou encore $a = 1$, $b = -8$ et $c = 17$

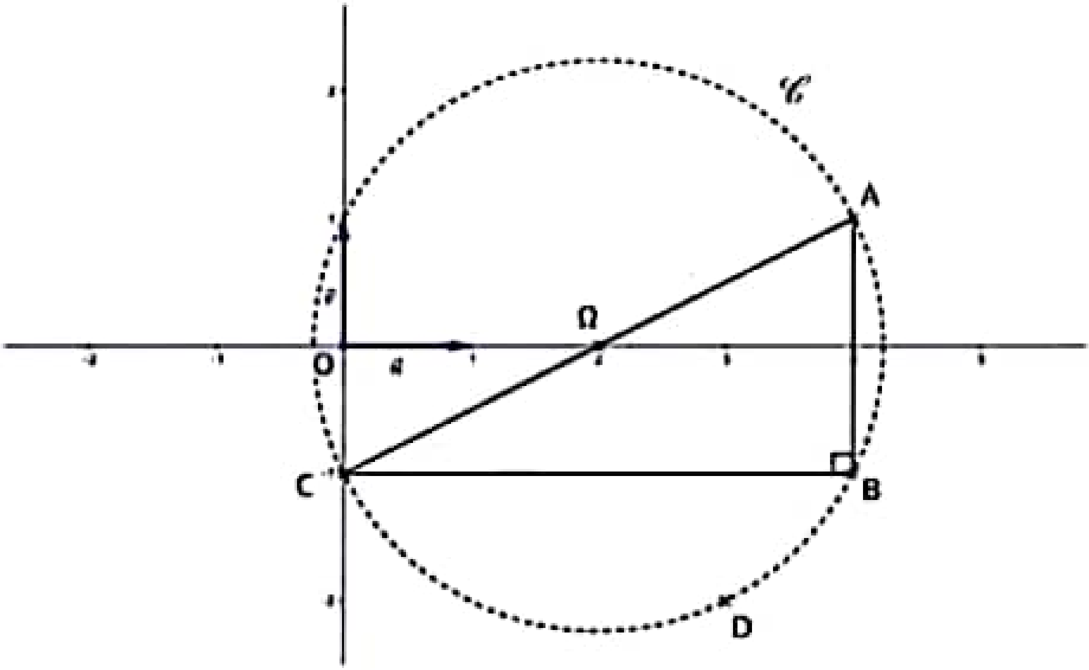
On aura donc $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

c) $(E) \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z^2 - 8z + 17 = 0$

► $z^2 - 8z + 17 = 0$, $\Delta = 64 - 4\times 17 = -4 = (2i)^2$ donc $z' = \frac{8+2i}{2} = 4 + i$ et $z'' = \frac{8-2i}{2} = 4 - i$

► $S_{\mathbb{C}} = \{-i, 4+i, 4-i\}$

2) a)



b) $\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{a-b}{c-b} = \frac{4+i-4+i}{-i-4+i} = \frac{2i}{-4} = -\frac{1}{2}i$ est imaginaire pure donc $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ et par conséquence ABC est rectangle en B

c) $z_\Omega = \frac{a+c}{2} = \frac{4}{2} = 2$

3) ABC est un triangle rectangle donc Ω est le centre son cercle circonscrit

$\Omega D = |2-d| = |2-3+2i| = |-1+2i| = \sqrt{5}$

$\Omega C = |2-i| = \sqrt{5} = \Omega D$ donc D appartient au cercle circonscrit de triangle ABC : le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$

Exercice 16

Partie A

1) $(3+i)^2 = 9+6i-1 = 8+6i$ donc $(3+i)$ est une racine carrée complexe de $(8+6i)$

2) $(-i)^3-(1+4i)(-i)^2-3\times(-i)-1-8i = i+(1+4i)+3i-1-8i = i+4i+3i-8i+1-1=0$ donc $(-i)$ est une racine de (E) et par suite on peut écrire :

$$z^3-(1+4i)z^2-3z-1-8i = (z+i)(az^2+bz+c) = az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ic$$
$$= az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ic$$

donc $\begin{cases} a=1 \\ b+ai=-(1+4i) \\ c+bi=-3 \\ ic=-1-8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1-5i=-(1+5i) \\ c=-8+i \end{cases}$

donc $z^3-(1+4i)z^2-3z-1-8i = (z+i)(z^2-(1+5i)z-8+i)$

3) $z^2-(1+5i)z-8+i=0$

$\Delta = (1+5i)^2-4\times(i-8) = 1+10i-25-4i+32 = 8+6i = (3+i)^2$

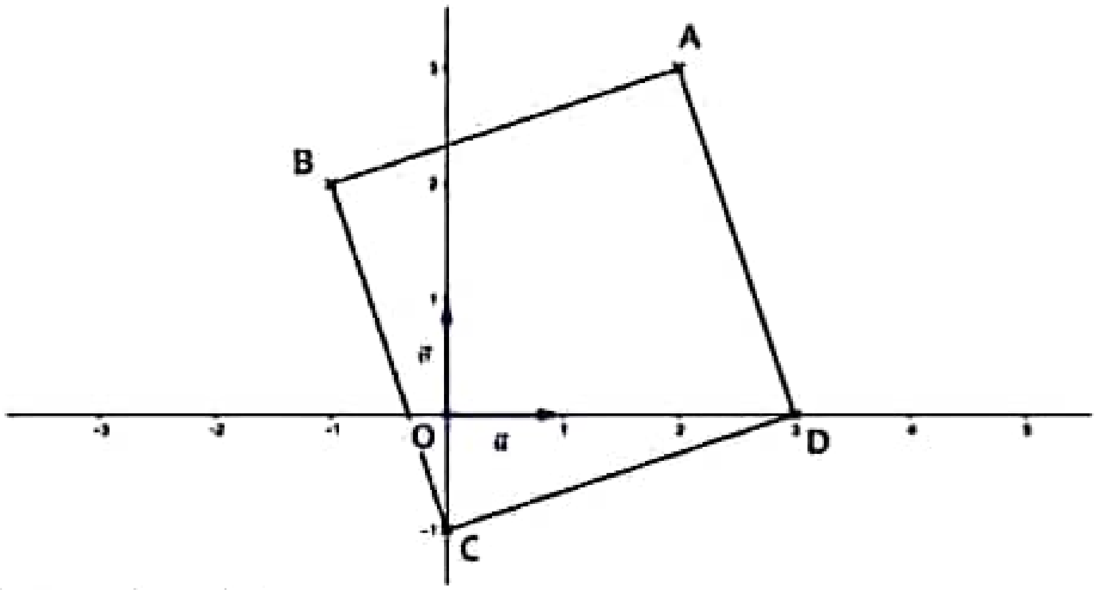
$z_1 = \frac{1+5i+3+i}{2} = 2+3i$ et $z_2 = \frac{1+5i-3-i}{2} = -1+2i$ et par suite $S_E = \{2+3i, -1+2i\}$

4) $(E) \Leftrightarrow (z+i)(z^2-(1+5i)z-8+i)=0 \Leftrightarrow z=-i$ ou $z^2-(1+5i)z-8+i=0$

donc $S_E = \{2+3i, -1+2i, -i\}$

Partie B

1)



2) a) $|Z| = \left|\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right| = \dfrac{|z_3 - z_2|}{|z_1 - z_2|} = \dfrac{BC}{BA}$

$\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_1 - z_2)[2\pi] = \arg(z_{BC}) - \arg(z_{BA})[2\pi]$

$= (\widehat{\vec{u},\vec{BC}}) - (\widehat{\vec{u},\vec{BA}})[2\pi]$

$= (\widehat{\vec{u},\vec{BA}}) + (\widehat{\vec{BA},\vec{BC}}) - (\widehat{\vec{u},\vec{BA}})[2\pi]$

$= (\widehat{\vec{BA},\vec{BC}})[2\pi]$

b) $Z = \dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \dfrac{-i + 1 - 2i}{2 + 3i + 1 - 2i} = \dfrac{1 - 3i}{3 + i} = \dfrac{(1 - 3i)(3 - i)}{10} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

c) $|Z| = |-i| = 1 = \dfrac{BC}{BA}$ donc $AB = BC$ et par suite ABC est isocèle en B

$Z = \dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \dfrac{z_{BC}}{z_{BA}}$ est imaginaire donc $\vec{BC} \perp \vec{BA}$ et par suite ABC est rectangle en B

3) ABC est rectangle isocèle en B donc il suffit de montrer que ABCD est un parallélogramme pour qu'il soit un carrée :

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{z_1 + z_3}{2} = \dfrac{2 + 3i - i}{2} = 1 + i \\ \dfrac{z_2 + z_4}{2} = \dfrac{-1 + 2i + 3}{2} = 1 + i \end{array}\right\}$ donc $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu donc ABCD est un parallélogramme

d'où le résultat.

Exercice 17

1) Pour montrer que ABCD est un trapèze il suffit de montrer que $(AD)//(BC)$:

$\dfrac{z_{DA}}{z_{CB}} = \dfrac{z_A - z_D}{z_B - z_C} = \dfrac{1 + 2i - (1 - 2i)}{1 + \sqrt{3} + i - (1 + \sqrt{3} - i)} = \dfrac{4i}{2i} = 2$ est un réel pure donc $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires et par suite $(AD)//(BC)$

2) $\dfrac{z_{BD}}{z_{AB}} = \dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} + i} = \dfrac{(-\sqrt{3} - 3i)(-\sqrt{3} - i)}{(-\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} - i)} = \dfrac{3 + i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} - 3}{4} = i\sqrt{3}$ donc $\vec{AB} \perp \vec{BD}$ c'est-à-dire $(AB) \perp (BD)$

3) a) ABD est un triangle rectangle en B et par suite Ω, le milieu de $[AD]$, est le centre du cercle Γ circonscrit du triangle ABD.

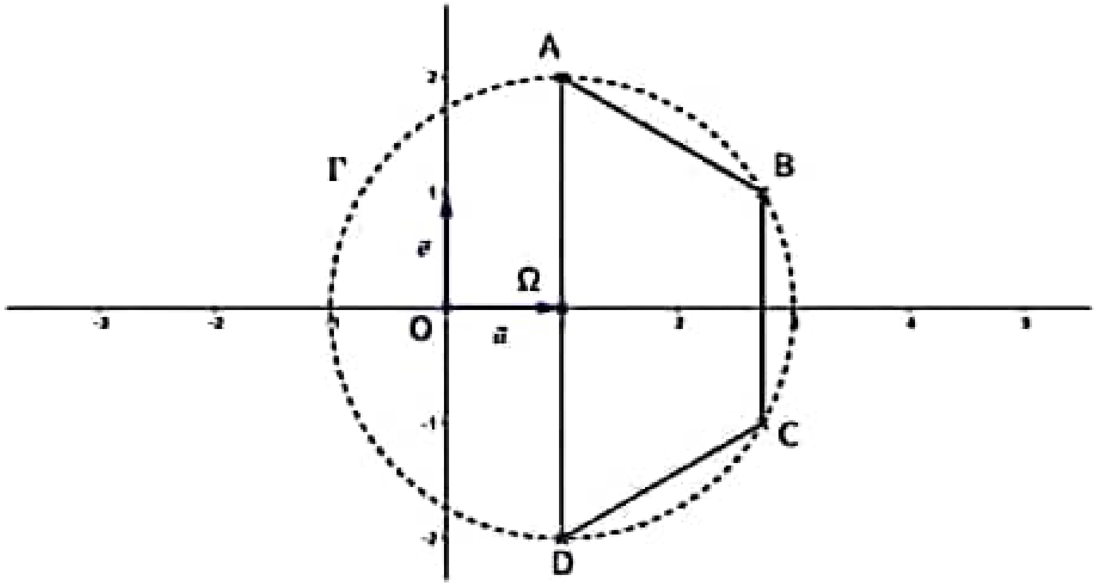
Montrons que C appartient à Γ :

$z_\Omega = \dfrac{z_A + z_D}{2} = \dfrac{1 + 2i + 1 - 2i}{2} = 1$

$\Omega A = |z_A - 1| = |2i| = 2$ et $\Omega C = |z_C - 1| = |\sqrt{3} - i| = 2 = \Omega A$ donc $C \in \Gamma$

Conclusion : A, B, C et D appartiennent au cercle Γ de centre $\Omega(1)$ et de rayon 2

b)



4) $(E): z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$

a) $\Delta=(-2(1+2\cos\theta))^2-4(5+4\cos\theta)=4+16\cos\theta+16\cos^2\theta-20-16\cos\theta=-16+16\cos^2\theta$

$$=-16(1-\cos^2\theta)$$
$$=-16\sin^2\theta$$
$$=(4i\sin\theta)^2$$

$$z'=\frac{2(1+2\cos\theta)-4i\sin\theta}{2}=\frac{2+4\cos\theta-4i\sin\theta}{2}=1+2\cos\theta-2i\sin\theta$$
$$z''=\frac{2(1+2\cos\theta)+4i\sin\theta}{2}=\frac{2+4\cos\theta+4i\sin\theta}{2}=1+2\cos\theta+2i\sin\theta$$

$S_{\mathbb{C}}=\{1+2\cos\theta-2i\sin\theta, 1+2\cos\theta+2i\sin\theta\}$

b) Soit M et M' les images des respectives de $z'=1+2\cos\theta-2i\sin\theta$ et $z''=1+2\cos\theta+2i\sin\theta$

$\Omega M=|2\cos\theta+2i\sin\theta|=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}=\sqrt{4}=2$ donc $M\in\Gamma$

$\Omega M'=|2\cos\theta-2i\sin\theta|=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}=\sqrt{4}=2$ donc $M'\in\Gamma$

Exercice 18

1) $z^2-2z\sqrt{2}+4=0$ $\quad\Delta=8-16=-8=(2i\sqrt{2})^2$

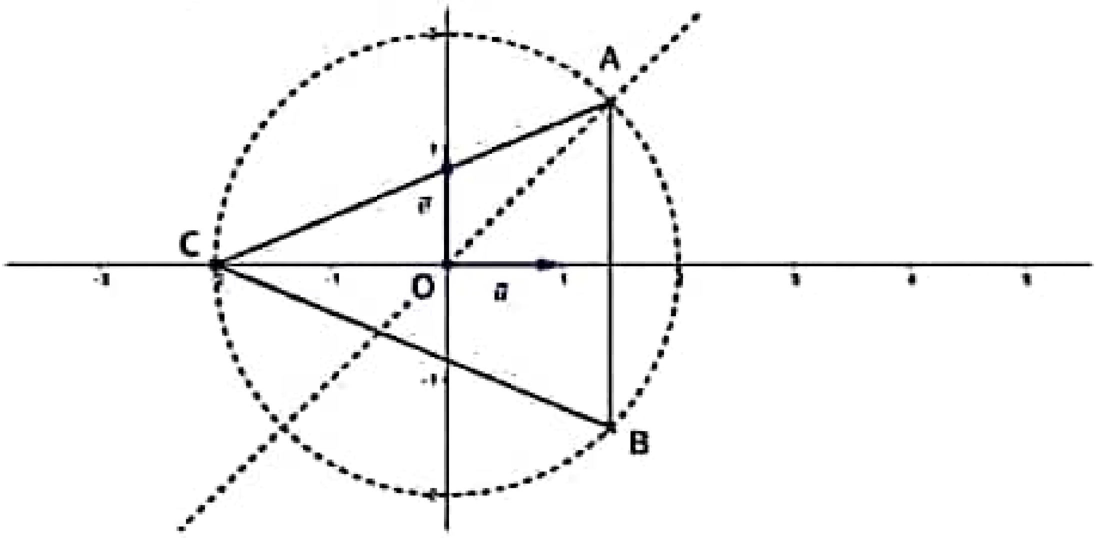
$z'=\frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}(1-i)=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z'=\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}(1+i)=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$S_{\mathbb{C}}=\{\sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(1-i)\}$

2) a) $|a|=|\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=2$ donc OA = OB donc A appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2

Re(a) = Im(a) donc A est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y=x$ dont l'abscisse est positif

$b=\bar{a}$ donc B est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses



b) $|z| = \left|\frac{a-c}{b-c}\right| = \frac{AC}{BC}$

$\arg(Z) = \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = \arg(a-c) - \arg(b-c)[2\pi] = \arg(z_{\vec{CA}}) - \arg(z_{\vec{CB}})[2\pi]$

$= (\widehat{\vec{u},\vec{CA}}) - (\widehat{\vec{u},\vec{CB}})[2\pi]$

$= (\widehat{\vec{u},\vec{CB}}) + (\widehat{\vec{CB},\vec{CA}}) - (\widehat{\vec{u},\vec{CB}})[2\pi]$

$= (\widehat{\vec{CB},\vec{CA}})[2\pi]$

c) $z = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}+2} = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{(1+\sqrt{2}+i)^2}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{(1+\sqrt{2})^2+2i(1+\sqrt{2})-1}{4+2\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}+2i(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= e^{i\frac{\pi}{4}}$

d) $|z| = \frac{AC}{BC} = 1$ donc $AC = BC$ et par suite ABC est un triangle isocèle.

$(\widehat{\vec{CB},\vec{CA}}) = \arg(z)[2\pi] = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 19

1) a) $(3-i)^2 = 3^2 - 6i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$

b) $(E): z^2 + (1+i)z - 2(1-i) = 0$ $\quad \Delta = (1+i)^2 - 4(-2(1-i)) = 2i + 8 - 8i = 8 - 6i = (3-i)^2$

$z' = \frac{-(1+i)-(3-i)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ et $z'' = \frac{-(1+i)+(3-i)}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-2, 1-i\}$

2) a) $(-2)^2 + (1+e^{i\theta})\times(-2) - 2(1-e^{i\theta}) = 4 - 2 - 2e^{i\theta} - 2 + 2e^{i\theta} = 0$ donc (-2) est une solution de (E_θ)

b) Soit z' l'autre solution de (E_θ) alors $(-2)\times z' = -2(1-e^{i\theta})$ et par suite $z' = 1-e^{i\theta}$

3) a) $AM_\theta = |1-e^{i\theta}+2| = |3-e^{i\theta}| = |3-\cos\theta - i\sin\theta| = \sqrt{(3-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$

$= \sqrt{9 - 6\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$= \sqrt{10 - 6\cos\theta}$

b) AM_θ est maximale si $10 - 6\cos\theta$ est maximale donc lorsque $\cos\theta = -1$ c'est-à-dire lorsque $\theta = \pi$

Exercice 20

1) a) $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ $\quad \Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 = -1 = i^2$

$z' = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ et $z'' = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{\sqrt{3}-i}{2}, \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right\}$

b) $z' = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z'' = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $z^4 - \sqrt{3}z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $\Leftrightarrow z^2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $z = -e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $z = e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ou $z = -e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{-e^{-i\frac{\pi}{12}}, -e^{i\frac{\pi}{12}}, e^{-i\frac{\pi}{12}}, e^{i\frac{\pi}{12}}\right\}$

2) a) $\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right)^2 - (2\sin\theta)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} + 1 = e^{i\pi-2i\theta} - 2\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} + 1 = -e^{-2i\theta} - \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} + 1$

$= -e^{-2i\theta} - (e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{-i\theta} + 1$

$= -e^{-2i\theta} - 1 + e^{-2i\theta} + 1 = 0$

donc $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ est une racine de l'équation (E)

Soit z_1 l'autre solution de (E) alors $z_1 \times e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = 1$ donc $z_1 = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

b) $z^4 - (2\sin\theta)z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ ou $z^2 = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$$\Leftrightarrow z=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} \text{ ou } z=-e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} \text{ ou } z=e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} \text{ ou } z=-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)},-e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)},e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)},e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right\}$$

Exercice 21

1) a) $\Delta=2(1-i)^2+16i=12i=6(1+i)^2$

b) $\Delta=6(1+i)^2$ donc $\delta=\sqrt{6}(1+i)$ est une racine carrée de Δ et par suite :

$$z'=\frac{\sqrt{2}(1-i)+\sqrt{6}(1+i)}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \text{ et } z''=\frac{\sqrt{2}(1-i)-\sqrt{6}(1+i)}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4},\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}\right\}$$

2) a) $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $$2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2-\sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}z^2-2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{4}}z-2i=-2iz^2-2e^{-i\frac{\pi}{2}}z-2i$$
$$=-2iz^2+2iz-2i$$
$$=-2i(z^2-z+1)$$

c) $$\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2-e^{-i\frac{\pi}{3}}+1=e^{-i\frac{2\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}+1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=0$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2-e^{i\frac{\pi}{3}}+1=e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}+1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=0$$

Or l'équation $z^2-z+1=0$ est une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ donc $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2-z+1=0$

d) (E) est une équation du second degré donc elle possède deux solutions dans $\mathbb{C}$

Si $z^2-z+1=0$ alors $2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2-\sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)-2i=0$ c'est-à-dire $e^{-i\frac{\pi}{4}}z$ est une solution de (E) et par suite $e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$ sont les deux solutions de (E)

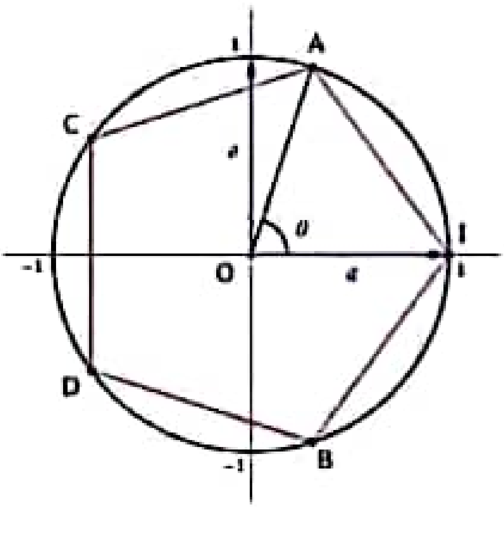
e) $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)>0$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)>0$ donc $e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

et par suite $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 22

1) a) $a=e^{i\theta}$, $\bar{a}=e^{-i\theta}$, $a^2=e^{2i\theta}$ et $\bar{a}^2=e^{-2i\theta}$

b)



2) a) $a+\bar{a}=2\mathrm{Re}(a)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

b) $a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1=a^2-a(a+\bar{a})+1=a^2-a^2-a\bar{a}+1=1-|a|^2=0$ donc a est une solution de (E)

$\bar{a}^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\bar{a}+1=\bar{a}^2-\bar{a}(a+\bar{a})+1=\bar{a}^2-\bar{a}^2-a\bar{a}+1=1-|a|^2=0$ donc $\bar{a}$ est une solution de (E)

3) a) $\left(z^2-\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)z+1\right)\left(z^2+\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)z+1\right)=z^4+\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)z^3+z^2-\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)z^3-\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)z^2$

$-\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)z+z^2+\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)z+1$

$=z^4+z^3+2z^2-z^2+z+1$

donc $(z-1)\left(z^2-\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)z+1\right)\left(z^2+\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)z+1\right)=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$

$=z^5+z^4+z^3+z^2+z-z^4-z^3-z^2-z-1$

$=z^5-1$

b) $a^5-1=(a-1)\left(a^2-\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)a+1\right)\left(a^2+\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)a+1\right)=0$ car d'après 2) b) $a^2-\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)a+1$

donc $a^5=1$ c'est-à-dire a est une racine cinquième de l'unité

4) a) Les racine cinquième de l'unité différents de 1 sont $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ avec $k\in\{1,2,3,4\}$

b) $\frac{2\pi}{5}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$

d'autre part $\mathrm{Im}(1)=0$, $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)<0$, $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)<0$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)=\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)<0$

donc $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaires sont strictement positives

c) $\mathrm{Re}(a)=\frac{\sqrt5-1}{4}>0$ et $\mathrm{Im}(a)=y_A>0$ donc $a=e^{i\frac{2\pi}{5}}$

5) $\bar a=e^{-i\frac{2\pi}{5}}=e^{i\frac{8\pi}{5}}$, $a^2=e^{i\frac{4\pi}{5}}$ et $\bar a^2=e^{-i\frac{4\pi}{5}}=e^{i\frac{6\pi}{5}}$ donc les affixes respectifs des points I, A, B, C et D sont les racines cinquièmes de l'unité donc les points I, A, B, C et D sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$

Exercice 23

1) $(E): z^2-iz\sqrt3-1=0$

$\Delta=(-i\sqrt3)^2-4\times(-1)=-3+4=1$ donc $z_1=\frac{i\sqrt3-1}{2}=-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2=\frac{i\sqrt3+1}{2}=\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$S_E=\left\{e^{i\frac{\pi}{3}},e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}$

2) a) $P(i\sqrt3)=3(i\sqrt3)^4-7i\sqrt3(i\sqrt3)^3-18(i\sqrt3)^2+7i\sqrt3(i\sqrt3)+3=27-63+54-21+3=0$

$P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4-7i\sqrt3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3-18\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2+7i\sqrt3e^{i\frac{\pi}{3}}+3$

$=3e^{i\frac{4\pi}{3}}-7i\sqrt3e^{i\pi}-18e^{i\frac{2\pi}{3}}+7i\sqrt3e^{i\frac{\pi}{3}}+3$

$=3\left(-\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\right)+7i\sqrt3-18\left(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)+7i\sqrt3\left(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)+3$

$=-\frac32-i\frac{3\sqrt3}{2}+7i\sqrt3+9-9i\sqrt3+i\frac{7\sqrt3}{2}-\frac{21}{2}+3=0$

b) $P\left(-\frac1z\right)=3\left(-\frac1z\right)^4-7i\sqrt3\left(-\frac1z\right)^3-18\left(-\frac1z\right)^2+7i\sqrt3\left(-\frac1z\right)+3=\frac{3}{z^4}+i\frac{7\sqrt3}{z^3}-\frac{18}{z^2}-\frac{7i\sqrt3}{z}+3$

$=\frac{1}{z^4}(3+7i\sqrt3z-18z^2-7i\sqrt3z^3+3z^4)$

$=\frac{1}{z^4}P(z)$

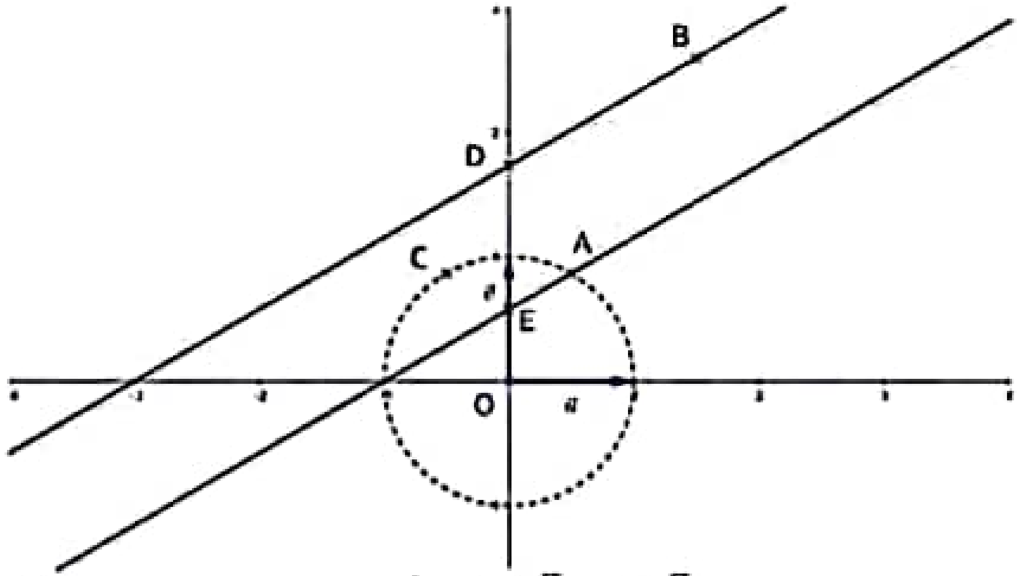
c) $e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une racine de P donc $P\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=P\left(e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=P\left(\frac{e^{i\pi}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)=P\left(-\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)=\frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4}P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=0$ et par suite

$e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une solution de l'équation $P(z)=0$

$i\sqrt3$ est une solution de l'équation $P(z)=0$ donc $P\left(\frac{\sqrt3}{3}i\right)=P\left(\frac{i}{\sqrt3}\right)=P\left(-\frac{1}{i\sqrt3}\right)=\frac{1}{(i\sqrt3)^4}P(i\sqrt3)=0$

et par suite $\frac{\sqrt3}{3}i$ est une solution de l'équation $P(z)=0$

3) a)



b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ donc $z_D = z_A + z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$

c) $E \in (OD)$ donc z_E est imaginaire pur ((OD) est l'axe des ordonnées) donc $z_E = ai$ où a est un réel

$(OE) // (BD)$ donc $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et par suite $\frac{z_{OE}}{z_{BD}}$ est réel

$$\frac{z_{AE}}{z_{BD}} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}} - ai}{i\sqrt{3} - 3e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - ai}{i\sqrt{3} - \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1 + i(\sqrt{3} - 2a)}{-i\sqrt{3} - 3}$$

$$= \frac{(1 + i(\sqrt{3} - 2a))(i\sqrt{3} - 3)}{12}$$

$$= \frac{i\sqrt{3} - 3 - (\sqrt{3} - 2a)\sqrt{3} - 3i(\sqrt{3} - 2a)}{12}$$

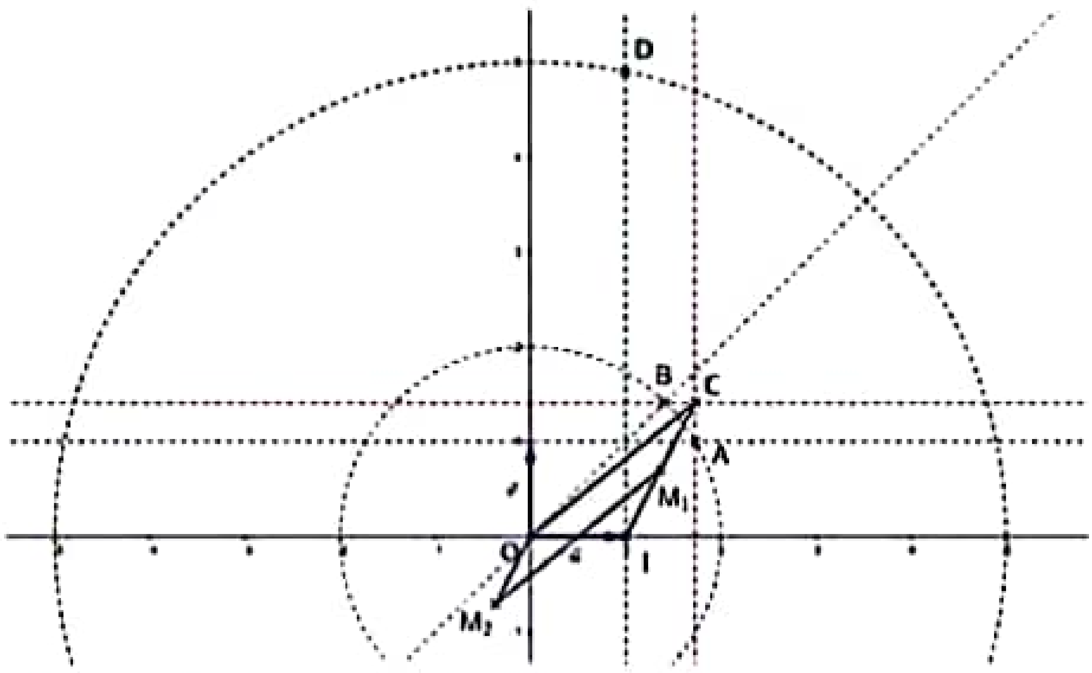
$$= \frac{-3 - (\sqrt{3} - 2a) + i\left[\sqrt{3} - 3(\sqrt{3} - 2a)\right]}{4}$$

donc $\sqrt{3} - 3(\sqrt{3} - 2a) = 0$ ou encore $\sqrt{3} - 2a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et par suite $2a = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ donc

$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c'est-à-dire $z_E = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 24 Session principale 2016

1) a)



b) $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$ et $a = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

2) a) $\mathrm{Re}(c) = \mathrm{Re}(a)$ et $\mathrm{Im}(c) = \mathrm{Im}(b)$ donc $c = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$

b) $c^2 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2i\sqrt{6} - 2 = 1 + 2i\sqrt{6}$

3) a) $OD = |z_D| = |c^2| = |1 + 2i\sqrt{6}| = \sqrt{1+24} = 5$

b) $OD = 5$ donc D appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 5

d'autre part $\mathrm{Re}(c^2) = 1$ donc D est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $x = 1$ dont l'ordonnée est positive

4) $\Delta = 4 + 8i\sqrt{6} = 4(1 + 2i\sqrt{6}) = (2c)^2$

$z_1 = \frac{2+2c}{4} = \frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{2-2c}{4} = \frac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2}\right\}$

5) a) $\frac{1+c}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2} = z_1$ donc M_1 est le milieu de $[IC]$

b) $z_{\overrightarrow{M_2M_1}} = z_1 - z_2 = \frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + i\sqrt{2} = c = z_{\overrightarrow{OC}}$ donc $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OC}$ et par suite OCM_1M_2 est un parallélogramme