LYCEE KRAM	Epreuve : *Mathématiques*
■■■	Section : 4ème *Sciences Expérimentales*
DEVOIR DE CONTROLE N°1	Durée : 2 *heures* — Coefficient : 3
11/2021	Professeur : **Wissem Fligène**

Exercice 1 : (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = -2i$ et $z_D = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1) a) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle de centre O et de rayon 2.

b) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_B, z_C et z_D.

c) Construire alors les points A, B, C et D.

2) Soit $w = z_D \times \overline{z_B}$.

a) Déterminer le module et un argument de w.

b) Ecrire w sous forme cartésienne.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3) Soit le point E d'affixe $z_E = z_B + z_D$.

a) Montrer que $OBED$ est un losange.

b) En déduire un argument de z_E.

Exercice 2 : (7 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_C = \overline{z_A}$.

1) Donner la forme algébrique de z_A, z_B et z_C.

2) Montrer que C est un point du cercle ζde diamètre $[AB]$.

3) A tout point M d'affixe z distinct de chacun des points A et B on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z+1-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}$

a) Montrer que si M' appartient à l'axe $(O,\vec{v})$ alors M appartient au cercle $\zeta\setminus\{A,B\}$.

b) Montrer que si $|z'| = 1$ alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

4) Soit D le point d'affixe $z_D = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i$ et D' le point d'affixe $z_{D'} = \dfrac{z_D + 1 - i\sqrt{3}}{z_D + i\sqrt{3}}$

a) Montrer que $z_{D'} = -i$.

b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle ζ

Exercice 3 : (7 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \begin{cases} -x - 2 + \sqrt{x^2 - 1} & si\ x \in]-\infty, -1] \\ x^3 + 3x + 3 & si\ x \in]-1, 0[\\ 2\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right) + 3 & si\ x \in]0, +\infty[\end{cases}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $3 \leq f(x) \leq 3 + \frac{4}{x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que f est continue en (-1).

b) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $]-1, 0[$.

b) Déterminer l'image de $]-1, 0[$ par f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1, 0[$ une solution unique α.

d) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

5) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2x\left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + 3$.

a) Montrer que $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

DEVOIR DE CONTROLE N°1

Correction

Exercice 1 :

1) a) $OA = |z_A| = |2| = 2$ alors $A \in \mathscr{C}(O,2)$ (0,25

$OB = |z_B| = |1+i\sqrt{3}| = 2$ alors $B \in \mathscr{C}(O,2)$ (0,25

$OC = |z_C| = |-2i| = 2$ alors $C \in \mathscr{C}(O,2)$ (0,25

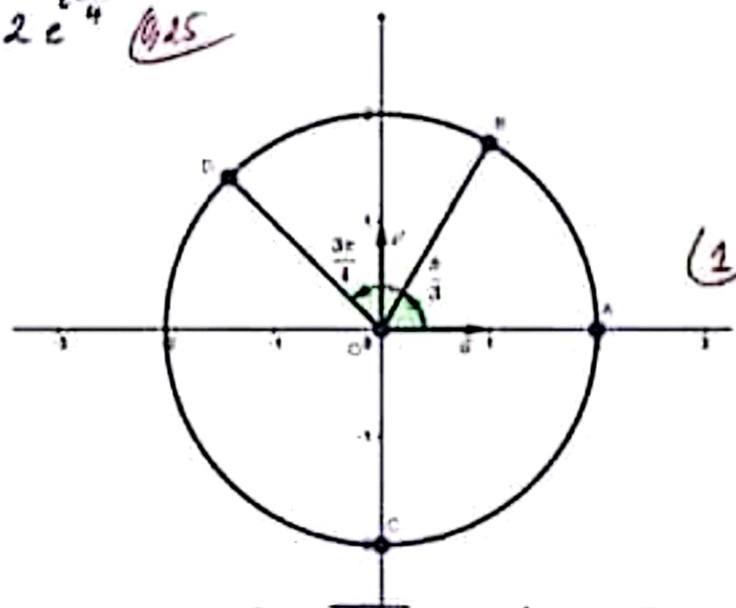
$OD = |z_D| = |-\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$ alors $D \in \mathscr{C}(O,2)$ (0,25

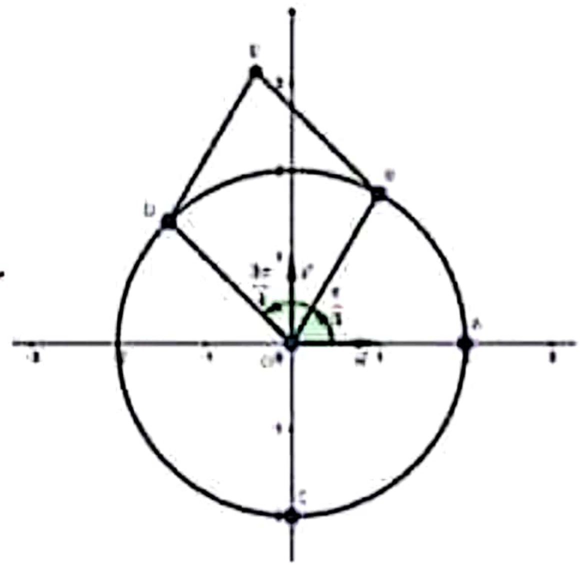
b) $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (0,25

$z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (0,25

$z_D = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (0,25

c)





(1

2) a) $w = z_D \times \overline{z_B} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \times \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{5\pi}{12}}$

donc $\boxed{|w| = 4}$ et $\boxed{\arg(w) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$ (1

b) $w = z_D \times \overline{z_B} = (-\sqrt{2}+i\sqrt{2})\overline{(1+i\sqrt{3})}$

$= (-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+i\sqrt{6}+i\sqrt{2}+\sqrt{6} = \boxed{(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$ (0,75

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{Re(w)}{|w|} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ (0,5

3) a) $z_E = z_B + z_D$ sig $z_{\overrightarrow{OE}} = z_{\overrightarrow{OB}} + z_{\overrightarrow{OD}}$ sig $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ sig $OBED$ est un parallélogramme et comme $OB = OE = 2$ alors $OBED$ est un losange (0,5

b) $\arg(z_E) \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OE}})\ [2\pi] \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}})\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\left[(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OD}}) - (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}})\right]\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{24}\ [2\pi] \equiv \boxed{\frac{13\pi}{24}}\ [2\pi]$ (0,5

M. Wissem Fligène

Exercice 2 :

1) $z_A = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} \times (-i) = \boxed{-i\sqrt{3}}$ (0,75

$z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-1+i\sqrt{3}}$ (0,75

$z_C = \overline{z_A} = \overline{-i\sqrt{3}} = \boxed{i\sqrt{3}}$ (0,75

2) $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = i\sqrt{3} - (-i\sqrt{3}) = 2i\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = i\sqrt{3} - (-1+i\sqrt{3}) = 1$

$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = 2i\sqrt{3}$ imaginaire pur alors $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$

donc $C \in$ au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ (0,75

3) a) $z' = \frac{z+1-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}} = \frac{z-(-1+i\sqrt{3})}{z-(-i\sqrt{3})} = \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} = \frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}$

$M' \in (O,\vec{v})$ alors z' imaginaire pur alors $\frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}$ imaginaire pur

alors $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AM}$ alors $M \in \mathscr{C}$

et comme $M \neq A$ et $M \neq B$ alors $M \in \mathscr{C} \setminus \{A,B\}$ (1

b) $|z'| = 1$ alors $\left|\frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}\right| = 1$ alors $\frac{|z_{\overrightarrow{BM}}|}{|z_{\overrightarrow{AM}}|} = 1$ alors $\frac{BM}{AM} = 1$ alors $BM = AM$

alors $M \in$ médiatrice Δ de $[AB]$ (1

4) a) $z_{D'} = \frac{\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}i+1-i\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}i+i\sqrt{3}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{1-2\sqrt{3}}{2}i}{\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{1+2\sqrt{3}}{2}i} = -i$ (0,75

b) On a $z_{D'} = -i$ qui est imaginaire pur alors $D' \in (O,\vec{v})$ donc d'après 3)a), $D \in \mathscr{C}$

d'autre part $|z_{D'}| = |-i| = 1$ donc d'après 3) b), $D \in \Delta$

d'où $D \in \Delta \cap \mathscr{C}$ et par suite $\boxed{z_D = \left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}i}$ est l'affixe d'un point de $\Delta \cap \mathscr{C}$.

(0,75

Soit E l'autre point de $\Delta \cap \mathscr{C}$ alors $ADBE$ est un carré donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DB}$

sig $z_E - z_A = z_B - z_D$ sig $z_E = z_A + z_B - z_D$

$= -i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}i$

$= \boxed{-\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$ (0,5

M. Wissem Fligène