LYCEE PILOTE NABEUL **** **DEVOIR CONTROLE N°1** **** **EPREUVE : MATHEMATIQUES**	SECTION : 4ème sciences expérimentales **PROFS : GASTLI ; LAATAOUI ; KOUCH & BEN RHIM** Durée : 2h. — Date : 08 / 11 / 2018

EXERCICE N°1 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f.

- $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique $(D) : y = \frac{1}{2}x$ au voisinage de ∞ .
- $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

Par lecture graphique :

1°) Déterminer L'ensemble de définition D_f de f ainsi D_c son domaine de continuité.

2°) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f\circ f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2f(x)-x$, et $\lim\limits_{x\to1} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

3°) On admet que sur $]0,+\infty[$ f vérifie la relation : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \ f(x)$.

a) Montrer $\lim\limits_{x\to0^+} x f(x) = 0$ puis déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x f(x)}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} x f(\sin x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left(\frac{\pi}{2} \ \ x\right) f(\cos x)$.

4°) Soit g une fonction définie et continue sur IR dont le tableau de variation ci-joint **(voir annexe)** et soit

$$h(x) = f\circ g(x) .$$

a) Montrer que h est définie sur $IR\setminus\{2\}$.

b) Montrer que h est continue sur $[-3,1]$.

c) Montrer que h est strictement croissant sur $[-3,1]$.

d) Montrer que l'équation $h(x) = \ \ 1$ admet une unique solution α dans $]-3,1[$.

EXERCICE N°2 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1}+x-1 & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty,1\right[$ on a : $\dfrac{x^2-x+2}{x-1}\leq f(x)\leq x$.

b) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3°) Montrer que f est continue sur IR.

4°) a) Montrer que l'équation $f(x)=x \quad 1$ admet au moins une solution $\alpha\in\left]\ \dfrac{1}{2},0\right[$.

b) Vérifier que : $\tan(\pi\alpha)=\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$.

5°) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

a) Montrer que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) g est-elle prolongeable par continuité à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$? Justifier.

EXERCICE N°3 : (8 points)

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-\sqrt{2}(1+i)z-1+i=0$

b) Vérifier que les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $z_1=2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2=2\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{5i\frac{\pi}{8}}$.

2°) Soit θ un réel de $\left]0;\pi\right[$.

a) Vérifier que $e^{2i\theta}-2i\sin\theta\, e^{i\theta}=1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) : $z^2-2e^{i\theta}z+2i\sin\theta\, e^{i\theta}=0$.

3°) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, on considère les points $A\left(e^{i\theta}+1\right)$, $B\left(e^{i\theta}\quad 1\right)$ et $C\left(1\quad e^{-i\theta}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble des points C lorsque θ décrit $\left]0,\pi\right[$.

b) Montrer que A, B et C sont alignés.

c) Montrer que le triangle OAB est rectangle en O.

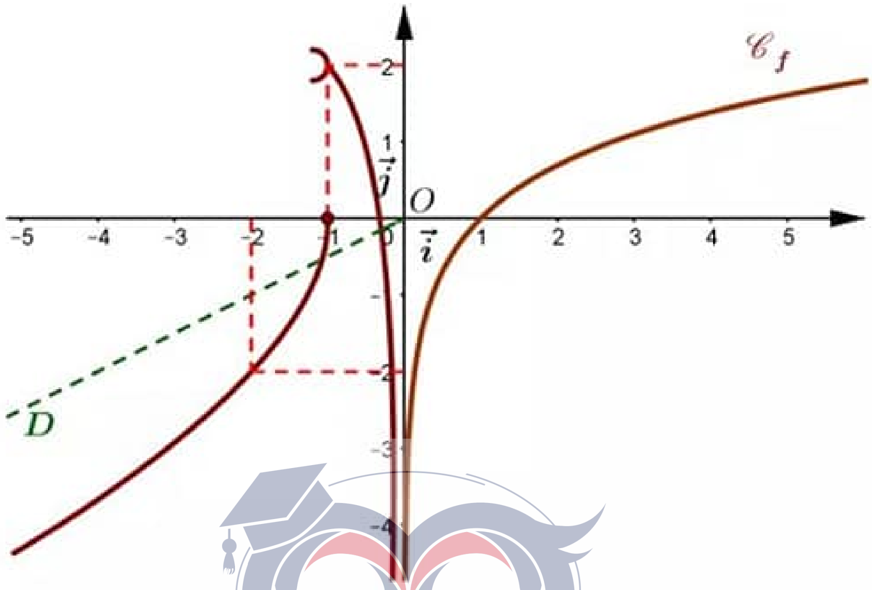
d) Déterminer θ pour que le triangle OAB soit isocèle.

4°) On prend $\theta=\dfrac{\pi}{5}$. Soit $M(z)$ un point du plan et soit $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{z-e^{i\theta}-1}{z-e^{i\theta}+1}$ $\left(z\neq e^{i\theta}\quad 1\right)$.

a) Déterminer l'ensemble des points M pour que z' soit imaginaire.

b) Montrer que si M varie sur la médiatrice de $[AB]$ alors M' varie sur un cercle que l'on précisera.

ANNEXE



x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
g	0	-2	-1	0	5