Les oscillations électriques libres non amorties BAC 2019

Exercice n°1 :

Un circuit oscillant est constitué par une bobine d'inductance **L=1,2 H** et de résistance négligeable en série avec un condensateur de capacité **C**.

Le condensateur est initialement chargé sous une tension U_0.

Un système d'acquisition permet de suivre l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps. On obtient la courbe de la figure 2

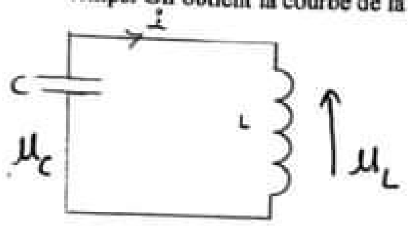


Figure 1

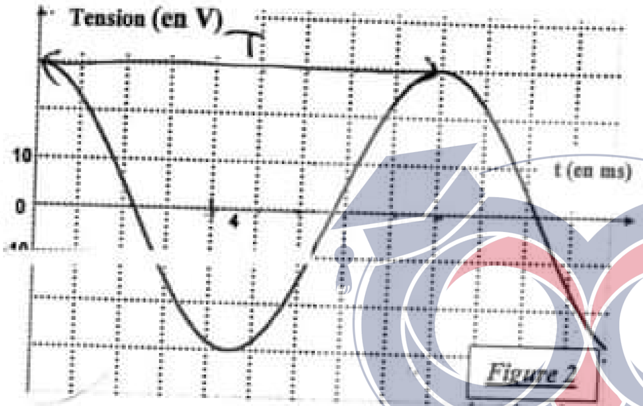


Figure 2

1°/ Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur.

2°/ Vérifier que la solution de l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme :

$u_c(t)=U_0 \sin(\omega_0 t+\varphi)$ avec ω_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de C et L.

Nommer ω_0 et préciser son unité.

3°/ Déterminer la valeur de la capacité **C** du condensateur.

4°/ **a)** Etablir l'expression instantanée de la tension u_C.

b) Déduire les expressions de **q (t)** et celle de **i (t)**.

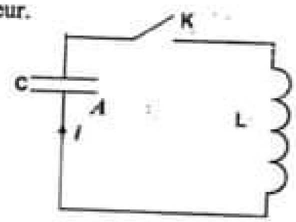
5°/ Montrer que l'énergie totale du circuit est constante au cours du temps. Calculer sa valeur.

Exercice n°2 :

On considère le circuit électrique représenté par la figure **3** formé par

- un condensateur de capacité **C** initialement chargé ;
- une bobine d'inductance **L** et de résistance nulle,
- un interrupteur **K**

Figure3



A l'instant t=0, on ferme l'interrupteur K. On désigne par **q** la charge portée par l'armature **A** du condensateur.

1°/ Etablir l'équation différentielle régissant les variations de la charge **q** du condensateur. Déduire que les oscillations sont non amorties.

2°/ Montrer que l'énergie électromagnétique **E** de l'oscillateur se conserve au cours du temps.

3°/ La courbe de variation de la tension u_L en fonction de temps est représentée sur la figure 4 suivante

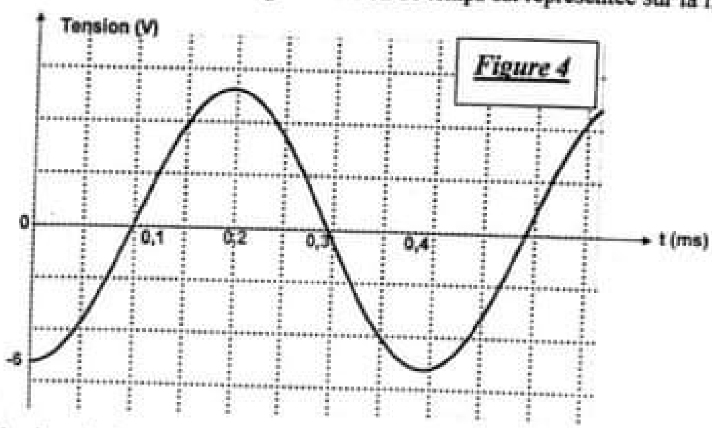


Figure 4

a) Quel est le signe de la charge électrique initiale de l'armature **A** ? Justifier la réponse.

b) Etablir l'expression de la tension $u_L(t)$.

4°/ Sachant que l'énergie totale de l'oscillateur est $E=12{,}5.10^{-6}$ j, déterminer **L** et **C**.

5°/ Etablir l'expression de la charge **q (t)**.

Exercice n°3 :

On considère le circuit de la figure 5 ci-contre
Le condensateur est initialement chargé. A l'instant **t=0**, on ferme l'interrupteur K et à l'aide d'un système d'acquisition, on suit l'évolution de l'intensité du courant **i** en fonction du temps. On obtient la courbe de la figure **6**
Le diagramme de la figure 6 représente l'enregistrement de l'énergie totale **E** ainsi que soit l'énergie magnétique E_L soit l'énergie électrique E_C.

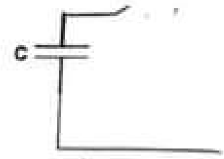


Figure.5

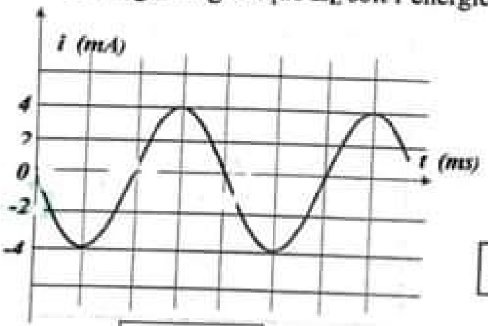


Figure.6a

Figure.6

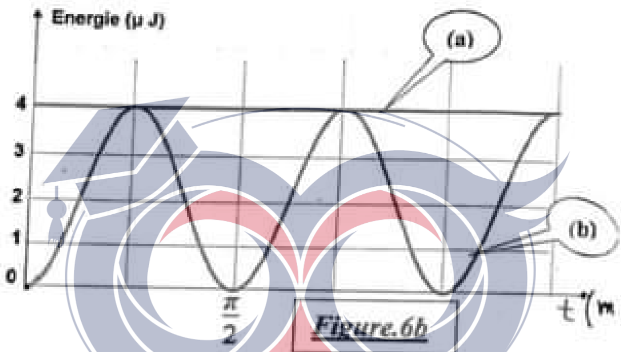
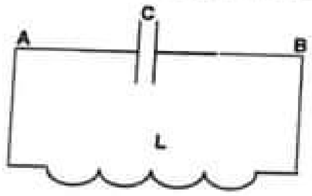


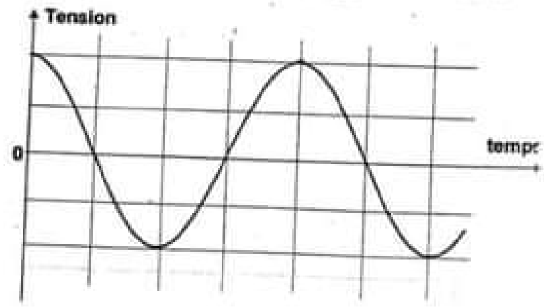
Figure.6b

1°/ a) Exprimer l'énergie électromagnétique **E** dans le circuit en fonction de **q**, **i** et des caractéristiques du circuit.
   b) Dire en le justifiant quelle est parmi les courbes **(a)** et **(b)** de la figure 6-b, celle qui représente E.
   c) Déduire de ce qui précède l'équation différentielle vérifiée par la charge q (t).
2°/ a) Etablir l'expression de l'intensité **i (t)**.
   b) En déduire l'expression de la charge **q (t)**.
3°/ En se basant sur les chronogrammes de la figure 6, déterminer les valeurs de la capacité **C** du condensateur et celle de l'inductance **L** de la bobine.
4°/ Dire en justifiant si la courbe **(b)** de la figure **6**, représente E_L **(t)** ou E_C **(t)**.
5°/ Représenter sur la figure **6.b**, la variation de l'énergie manquante.

Exercice n°4

Un condensateur de capacité **C** initialement chargé est branché aux bornes d'une bobine purement inductive d'inductance **L=0,163 H**. A l'aide d'un oscilloscope, on visualise les variations de la tension u_{AB} aux bornes du condensateur en fonction du temps.
On obtient l'oscillogramme de la figure 7 suivante.





1°/ Préciser en le justifiant, si les oscillations sont amorties ou non amorties.
2°/ La variation de l'énergie magnétique (E_L) emmagasinée par la bobine en fonction de u_{AB}^2 est donnée par la figure 8.
   a) Interpréter la courbe $E_L=f(u_{AB}^2)$ et donner son équation.
   b) On admet que l'énergie totale **E** du circuit étudié se conserve.

   Montrer que : $E_L = -\frac{1}{2} C\, u_{AB}^2 + E$.

   c) Déduire les valeurs de :
   - la capacité **C** du condensateur ;
   - l'énergie totale **E** de l'oscillateur

   d) Calculer la période propre T_0 de l'oscillateur étudié.

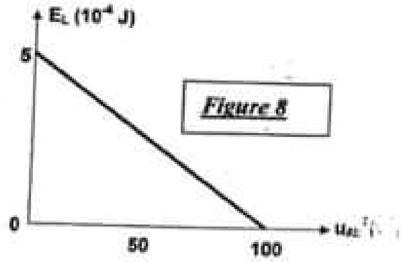


Figure 8

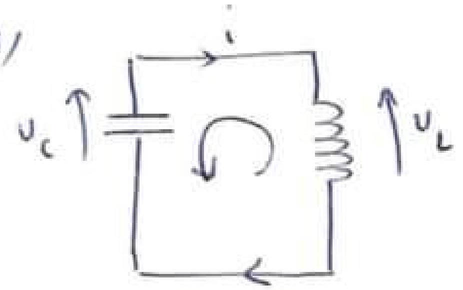
3°/ A partir de la courbe de la figure 8, déterminer la valeur maximale de la tension u_{AB}.
4°/ Déterminer la sensibilité verticale (en volt/division) et la sensibilité horizontale (en seconde/division) utilisées pour l'oscillogramme de la figure 8

F

correction de la série oscillations libres non amorties

Ex n°1.

1/



loi des mailles :

$$u_C + u_L = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + u_C = 0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + u_C = 0$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

2) on a :

$$u_C(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{du_C}{dt} = \omega_0 U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\omega_0^2 U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2 U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

Par identification

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

ω_0 : pulsation propre du circuit LC

ω_0 s'exprime en $rad.s^{-1}$

3) $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$$

or $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$C = \frac{1}{\frac{4\pi^2}{T_0^2}L}$$

$$C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L}$$

Graphiquement :

$$\boxed{T_0 = 9.10^{-2} s}$$

A.N

$$\boxed{C = 1,35\,10^{-6} F}$$

4) on a

$$u_c(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_c})$$

Graphiquement :

$$U_0 = 30V$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\omega_0 = 250\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

A $t=0$

$$u_c(t=0) = U_0$$

$$\cancel{U_0} \sin(\varphi_{u_c}) = \cancel{U_0}$$

$$\sin(\varphi_{u_c}) = 1$$

$$\boxed{\varphi_{u_c} = \frac{\pi}{2}}$$

alors

$$\boxed{u_c(t) = 30 \sin\left(250\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

b)

$$q(t) = C \cdot u_c(t)$$

$$q(t) = 1{,}35\,10^{-6} \times 30 \sin\left(250\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{q(t) = 40{,}5\,10^{-6} \sin\left(250\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

soit $Q_{max} = 40{,}5\,10^{-6}$

$$\varphi_q = \frac{\pi}{2}$$

$$i(t) = \omega_0 Q_{max} \cos\left(250\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i(t) = \omega_0 Q_{max} \sin\left(250\pi t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\omega_0 Q_{max} = 31{,}8\,10^{-3} \text{ A}$$

$$\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2} = \pi$$

d'où

$$\boxed{i(t) = 31{,}8\,10^{-3} \sin(250\pi t + \pi)}$$

5) on a :

$$E = E_c + E_L$$

$$= \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}} C \times \cancel{2} \frac{du_c}{dt} u_c + \frac{1}{2} L \times 2 \frac{di}{dt} \times i$$

$$= C \frac{du_c}{dt} \times u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} \times C \frac{du_c}{dt}$$

$$= C \frac{du_c}{dt} \underbrace{\left[LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c \right]}_{=0}$$

D'après l'équation différentielle

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow E = cte.$$

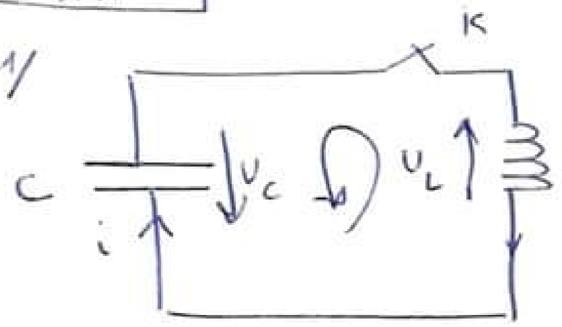
$$E = E_{C\,max} = E_{L\,max}$$

$$E_{C\,max} = \frac{1}{2} C U_0^2$$

$$\boxed{E = 607{,}5\,10^{-6} \text{ J}}$$

Ex n°2

1/



Loi des mailles :

$u_L + u_C = 0$

$L\frac{di}{dt} + u_C = 0$

$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

Dans cette équation différentielle on remarque l'absence du terme $(R+r)\frac{dq}{dt}$ responsable de l'amortissement d'où les oscillations obtenues sont des oscillations non amorties

2/ $E = E_C + E_L$

$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}C} \times \cancel{2}\frac{dq}{dt} \times q + \frac{1}{\cancel{2}}L \times \cancel{2} \times \frac{di}{dt} \times i$

$\frac{dE}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}\cdot\frac{dq}{dt}$

$= \frac{dq}{dt}\left[L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}\right]$

$= 0$ D'après l'équation différentielle

$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{E = cte}$

Par conséquent ; ce type d'oscillateur conserve l'énergie

3/ D'après la loi des mailles

$u_L + u_C = 0$

$u_C = -u_L$

A $t = 0$ $u_L = -6V$

alors $u_C = 6V > 0$

or $q = C.u_C \Rightarrow q > 0$

b) $u_L(t)$ est une fonction sinusoïdale qui s'écrit sous la forme

$u_L(t) = U_{L\max}\sin(\omega_0 t + \varphi_L)$

Graphiquement

$$\boxed{U_{L\max} = 6V}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ or $T_0 \simeq 0,4\,10^{-3}s$

$$\boxed{\omega_0 = 5000\pi\ rad.s^{-1}}$$

à $t=0$

$u_L(t=0) = -U_{Lmax}$

$\cancel{U_{Lmax}} \sin(\varphi_L) = -\cancel{U_{Lmax}}$

$\sin(\varphi_L) = -1$

$\varphi_L = -\frac{\pi}{2}$

d'où

$$\boxed{u_L(t) = 6 \sin\left(1000\pi t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

4)

$E = E_{Cmax}$

$E = \frac{1}{2} C U_{Cmax}^2$

or $U_{Cmax} = -U_{Lmax}$

$U_{Cmax} = 6V$

$C = \frac{2E}{U_{Cmax}^2}$

$$\boxed{C = 0{,}694\ 10^{-6} F}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{(1000\pi)^2 \times C}$

A.N

$$\boxed{L = 5{,}83\ 10^{-3} H}$$

5/

on a

$u_C(t) = -u_L(t)$

$u_C(t) = -U_{Lmax} \sin(\omega_0 t + \varphi_L)$

$= U_{Lmax} \sin(\omega_0 t + \varphi_L + \pi)$

$q(t) = C \cdot u_C(t)$

$= C U_{Lmax} \sin(\omega_0 t + \varphi_L + \pi)$

$= 0{,}694\ 10^{-6} \times 6 \sin\left(1000\pi t + \pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{q(t) = 4{,}164\ 10^{-6} \sin\left(1000\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Ex n°3

1/a)

$$E = E_c + E_L$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

b) L'oscillateur (LC) conserve l'énergie totale d'où : La courbe (a) correspond à E

c) L'énergie totale du système se conserve d'où $E = cte \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}C} \times \cancel{2}\frac{dq}{dt} \times q + \frac{1}{\cancel{2}}L \times \cancel{2}\frac{di}{dt} \times i$$

$$\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{di}{dt} \times i = 0$$

$$\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} \times \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\left[\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2}\right] = 0\right) \times \frac{1}{\frac{dq}{dt}}$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

5

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

2) a)

$$i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_i)$$

Graphiquement :

$$I_{max} = 4 \cdot 10^{-3}\ A$$

or $T_E = \frac{T_0}{2}$

$T_0 = 2T_E$ avec $T_E = \frac{\pi}{2}10^{-3}\ s$

$$T_0 = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}10^{-3}\ s$$

$$T_0 = \pi\ 10^{-3}\ s$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\cancel{\pi}\ 10^{3}}{\cancel{\pi}\ 10^{-3}}$$

$$\omega_0 = 2000\ rad.s^{-1}$$

À $t = 0$

$$i(t=0) = 0$$

$$I_{max}\sin(\varphi_i) = 0$$

$$\sin(\varphi_i) = 0$$

$\Rightarrow \varphi_i = 0\ rad$

ou

$\varphi_i = \pi\ rad.$

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right)_{t=0} = I_{max}\cos\varphi_i < 0$$

car la courbe est décroissante à $t=0$

$I_{max}\cos\varphi_i < 0$

$\Rightarrow \cos\varphi_i < 0$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_i = \pi \text{ rad}}$

d'où

$i(t) = 4\,10^{-3}\sin(2000t + \pi)$

b) on a : $I_{max} = 4\,10^{-3}$ A

$\varphi_i = \pi$ rad

$\boxed{\omega_0 = 2000 \text{ rad.s}^{-1}}$

or $I_{max} = \omega_0 Q_{max}$

$$Q_{max} = \frac{I_{max}}{\omega_0} = \frac{4.10^{-3}}{2000}$$

$\boxed{Q_{max} = 2\,10^{-6}\ C}$

(6)

$\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$

$\varphi_q = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$

$= \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$q(t) = 2.10^{-6}\sin\left(2000t + \frac{\pi}{2}\right)$

3) on a : $E = E_{C\,max} = E_{L\,max}$

$$E = \frac{1}{2} L I_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$$

$$C = \frac{Q_m^2}{2E}$$

$$C = \frac{(2.10^{-6})^2}{2 \times 4\,10^{-6}}$$

$\boxed{C = 0{,}5\ 10^{-6}\ F}$

Pour L :

1ère méthode :

$$L = \frac{2E}{I_{max}^2} = \frac{2\times 4.10^{-6}}{(4.10^{-3})^2}$$

$\boxed{L = 0{,}5\ H}$

2ème méthode :

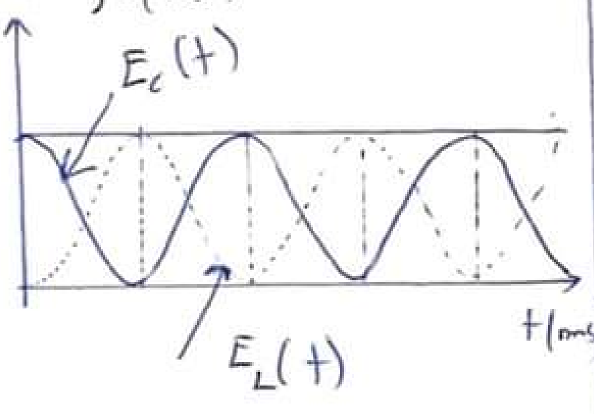
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$$

$L = 0{,}5$ H

4) Initialement le condensateur est chargé donc $q = Q_{max}$

$\Rightarrow E = E_{C\,max}$ (à $t=0$)

or d'après la figure 6b l'énergie représentée est nulle à ($t=0$) par conséquent, elle représente $E_L(t)$ (énergie stockée par la bobine)

5) 

Ex n°4

1) L'amplitude des oscillations reste constante au cours du temps d'où les oscillations sont non amorties

2/a) La courbe de $E_L = f(u_{AB}^2)$ est un segment de droite affine d'équation

$$E_L = a\,u_{AB}^2 + b$$

avec $\begin{cases} a : \text{pente de la droite} \\ b : \text{ordonnée à l'origine} \end{cases}$

$$b = 5.10^{-4}\,J$$

$$a = \frac{\Delta E_L}{\Delta u_{AB}^2} = \frac{0 - 5\,10^{-4}}{100 - 0}$$

$$a = -5\,10^{-6}\ J.V^{-2}$$

d'où

$$E_L = -5\,10^{-6}\,u_{AB}^2 + 5\,10^{-4}$$

b) on a :

$$E = E_c + E_L$$

$$E = \frac{1}{2} C u_c^2 + E_L$$

or $u_c = u_{AB}$

$$E = \frac{1}{2} C u_{AB}^2 + E_L$$

$$\boxed{E_L = -\frac{1}{2} C u_{AB}^2 + E}$$

c) on a :

$$\begin{cases} E_L = -\frac{1}{2} C u_{AB}^2 + E \\ E_L = -5\,10^{-6} u_{AB}^2 + 5\,10^{-4} \end{cases}$$

Par analogie :

$$\cancel{-}\frac{1}{2} C = \cancel{-} 5\,10^{-6}$$

$$C = 2 \times 5\,10^{-6}$$

$$C = 10\,10^{-6}\ F$$

$$\boxed{E = b = 5\,10^{-4}\ J}$$

d) on a : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T_0 = 2\pi \times \sqrt{0{,}163 \times 10.10^{-6}}$$

$$\boxed{T_0 = 8\,10^{-3}\ s}$$

3/ $u_{AB}^2 = 100\ V^2$

$$u_{AB} = \sqrt{100}$$

$$U_{AB} = 10\ V$$

4) $U_{Cmax} = n_D\, S_V$

$$T_0 = n_D \cdot S_h$$

$$S_V = \frac{U_{Cmax}}{n_D} = \frac{U_{AB}}{n_D}$$

$$S_V = \frac{10}{2} = 5$$

$$S_V = 5V / Div$$

$$S_h = \frac{T_0}{n_D} = \frac{8\,10^{-3}}{4} = 2\,10^{-3}$$

$$\boxed{S_h = 2ms / Div}$$