

**EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010**

**SECTION : MATHÉMATIQUES**  
**ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES**

**DURÉE : 4h**      **COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

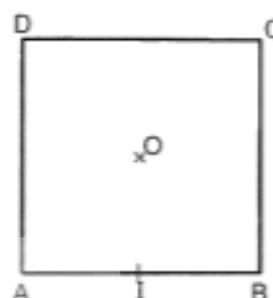
**Exercice 1(4 points)**

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.  
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.  
Aucune justification n'est demandée.

ABCD est un carré de centre O tel que

$$(\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } I \text{ le milieu de } [AB].$$

Soit  $S_{(BC)}$ ,  $S_{(BD)}$  et  $S_{(OI)}$  les symétries d'axes respectifs (BC), (BD) et (OI) et  $t_{\overline{BD}}$ ,  $t_{\overline{CD}}$  et  $t_{\overline{BC}}$  les translations de vecteurs respectifs  $\overline{BD}$ ,  $\overline{CD}$  et  $\overline{BC}$ .



1) L'isométrie  $S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ t_{\overline{BC}}$  est

- a) une rotation
- b) une translation
- c) une symétrie glissante.

2)  $t_{\overline{BD}} \circ S_{(BC)}$  est égale à

- a)  $t_{\overline{CD}} \circ S_{(OI)}$
- b)  $t_{\overline{BC}} \circ S_{(OI)}$
- c)  $S_{(BC)}$ .

3) Soit  $r_1$  la rotation de centre O d'angle  $(-\frac{\pi}{2})$  et  $r_2$  la rotation de centre C d'angle  $(\frac{\pi}{2})$ .

$r_1 \circ r_2$  est

- a) la symétrie centrale de centre A
- b) la translation de vecteur  $\overline{CB}$
- c) la translation de vecteur  $\overline{AD}$ .

4) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme D en A. Alors

- a)  $S(A) = O$
- b)  $S(I) = O$
- c)  $S(C) = O$ .



TuniTests

**Exercice 2 (6 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}$ .  
 b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
 c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) Montrer que la tangente  $\Delta$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 2 a pour équation  $y = \frac{e^2}{8}(x-2)$ .
- 3) On se propose d'étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de sa tangente  $\Delta$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$ . On donne ci-dessous le tableau de variation de  $g$ .

$x$	0	2	3	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{e^2}{8}$	$\frac{e^3}{27}$	$+\infty$

- a) Montrer que l'équation  $g(x) = \frac{e^2}{8}$  admet dans  $]3, +\infty[$  une solution unique  $\alpha$  telle que  $4,2 < \alpha < 4,3$ .
  - b) Dédire la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$ .
- 4) Justifier l'existence sur  $]0, +\infty[$  d'une primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(1) = e$ .
  - 5) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}_F$  de la fonction  $F$ , la droite  $\Delta$  et le rectangle ABCD tel que  $A(1, e)$ ;  $B(0, e)$ ;  $C(0, F(2))$  et  $D(1, F(2))$ .
    - a) Etudier les branches infinies de  $\mathcal{C}_F$ .
    - b) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans l'annexe ci-jointe.
  - 6) Soit  $t \in [1, 2[$ . On désigne par  $S(t)$  la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe  $(O, \vec{i})$  et les droites d'équations  $x = t$  et  $x = 2$ . On désigne par  $\mathcal{A}(t)$  l'aire de  $S(t)$ .
    - a) Exprimer  $\mathcal{A}(t)$  en fonction de  $F(t)$ .
    - b) Hachurer  $S(1)$  et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD.
    - c) Montrer qu'il existe un unique  $t_0 \in [1, 2[$  tel que  $\mathcal{A}(t_0) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(1)$ .
    - d) Construire le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $t_0$ .

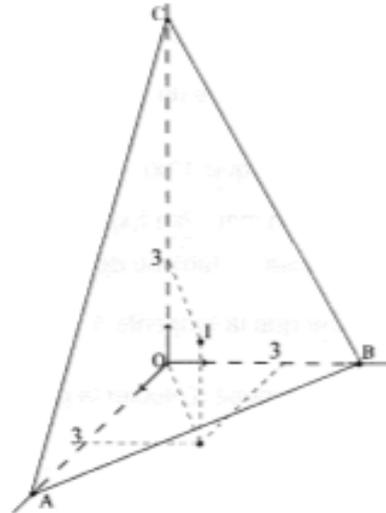
### Exercice 3 (5 points)

Soit  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  un repère orthonormé direct de l'espace.

Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre

tel que  $\vec{OA} = 5\vec{u}$ ,  $\vec{OB} = 5\vec{v}$ ,  $\vec{OC} = 10\vec{w}$  et

I est le point de coordonnées  $(3,3,3)$ .



- 1) Vérifier que le plan  $(ABC)$  a pour équation  $2x + 2y + z - 10 = 0$ .
- 2) Soit  $S$  la sphère de centre  $I$  et de rayon 3.
  - a) Quelle est la position relative de  $S$  et du plan  $(ABC)$  ?
  - b) Montrer que  $S$  est tangente aux plans  $(OAB)$ ,  $(OAC)$  et  $(OBC)$ .
- 3) Soit  $k$  un réel non nul et  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ . On désigne par  $S'$ , la sphère image de  $S$  par  $h$ .
  - a) Montrer que  $S'$  est tangente aux plans  $(OAB)$ ,  $(OAC)$  et  $(OBC)$ .
  - b) Déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $S'$  est tangente au plan  $(ABC)$ .
- 4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.

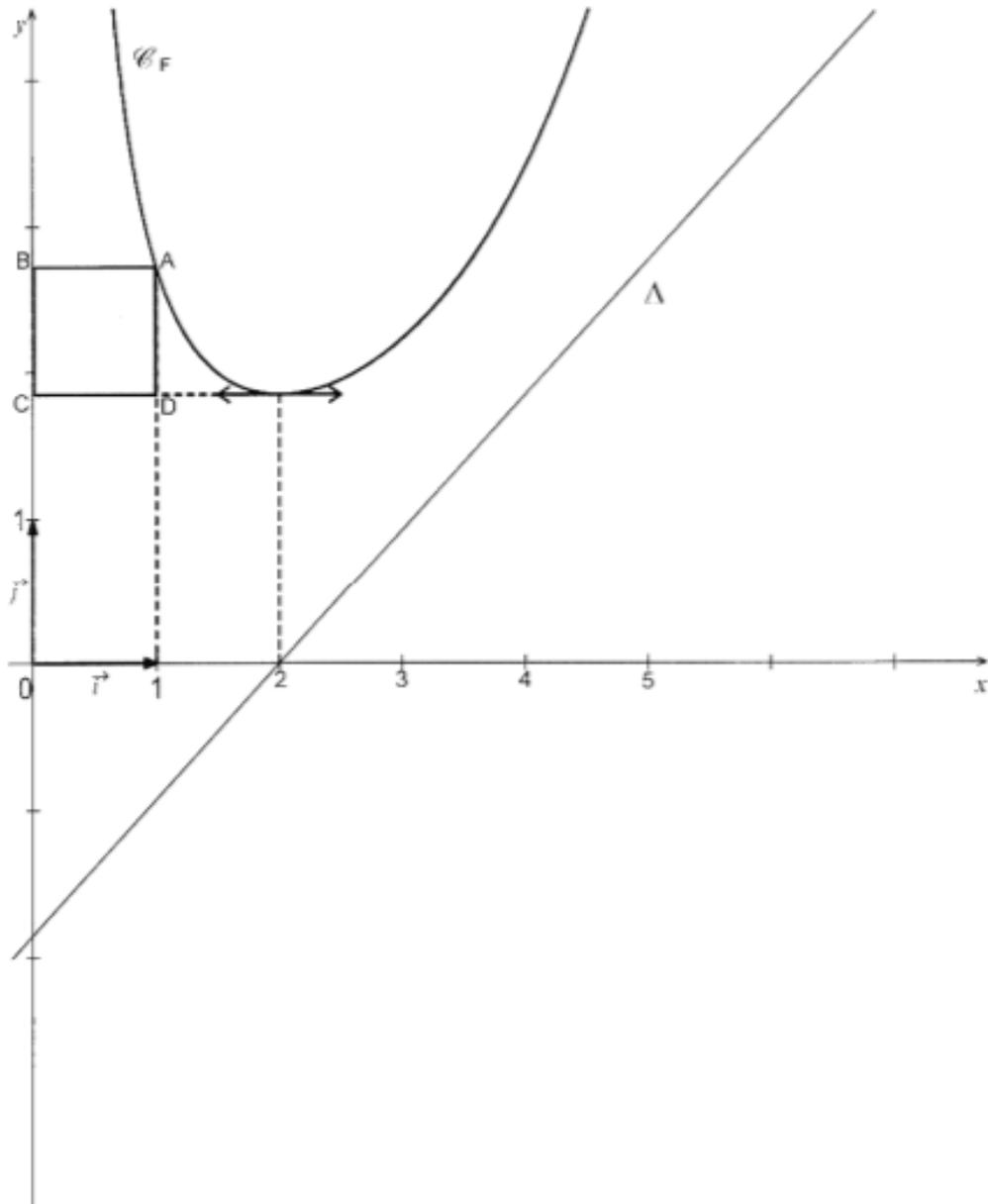
### Exercice 4 (5 points)

On pose  $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$ .

- 1) Soit  $n$  un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de  $n$ , le reste de  $7^n$  modulo 100.
- 2) En déduire qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $a = 100k - 1$ .
- 3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que  $a^{100} = 1 \pmod{100^2}$ .  
b) Déterminer les quatre derniers chiffres de  $a^{100}$ .

TuniTests

ANNEXE A RENDRE AVEC LA FEUILLE DE COPIE



**Exercice 1 :**

1. a ;      2. b ;      3. b ;      4. c ;

**Exercice 2 :**

Soit  $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$ , où  $x > 0$ .

1. a) Pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{[e^x + (x-2)e^x]x^3 - 3x^2(x-2)e^x}{x^6} = \frac{e^x(x-1)x - (3x-6)e^x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ .

c) Pour tout  $x > 0$ ,  $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 > 0$  donc  $f'(x) > 0$ .

D'où le tableau de variation de  $f$  :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. On a :  $f(2) = 0$  et  $f'(2) = \frac{2e^2}{16} = \frac{e^2}{8}$  la tangente ( $\Delta$ ) à ( $\mathcal{C}_f$ ) la courbe représentative de  $f$  a pour

équation  $y = \frac{e^2}{8}(x-2)$ .

3. a) On a :  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[3, +\infty[$ ,  $g([3, +\infty[) = \left[\frac{e^3}{27}, +\infty[$  et

$\frac{e^2}{8} \in \left[\frac{e^3}{27}, +\infty[$  donc l'équation  $f(x) = \frac{e^2}{8}$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]3, +\infty[$ .

$f(4,2) \approx 0,9$  ,  $f(4,3) \approx 0,9269$  et  $\frac{e^2}{8} \approx 0,923$

D'où  $f(4,2) - \frac{e^2}{8} \approx -0,023$  et  $f(4,3) - \frac{e^2}{8} \approx 0,0039$  donc  $4,2 < \alpha < 4,3$ .

b) Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) - \frac{e^2}{8}(x-2) = (x-2)\left(\frac{e^x}{x^3} - \frac{e^2}{8}\right) = (x-2)[g(x) - g(2)]$ .

Or  $g(x) = \frac{e^x}{x^3} \Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = \alpha$ .

Comme  $g$  est strictement décroissante sur  $]0,3]$  alors :

$$\color{red}{+} \quad 0 < x < 2 \Rightarrow g(x) > g(2) \Rightarrow g(x) - g(2) > 0$$

$$\color{red}{+} \quad 2 < x \leq 3 \Rightarrow g(2) > g(x) \Rightarrow g(x) - g(2) < 0$$

D'autre part,  $g$  est strictement croissante sur  $[3, +\infty[$ , donc

$$\color{red}{+} \quad 3 \leq x < \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) \Rightarrow g(x) - g(2) < 0$$

$$\color{red}{+} \quad 2 < x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha) \Rightarrow g(x) - g(2) > 0$$

D'où le tableau de signe de  $g(x)$  :

x	0	2	$\alpha$	$+\infty$		
$g(x) - g(2)$		+	0	-	0	+

IL en résulte :

x	0	2	$\alpha$	$+\infty$		
$g(x) - g(2)$		+	0	-	0	+
$x - 2$		-	0	+		+
Position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\Delta)$		au dessous	0	au dessous	0	au dessus

$(\mathcal{C}_f)$  coupe  $(\Delta)$  aux points d'abscisse 2 et  $\alpha$ .

4. La fonction  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et  $1 > 0$  donc  $f$  admet sur  $]0, +\infty[$  une unique primitive  $F$  telle que  $F(1) = e$ .



TuniTests

5. a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  donc l'axe des ordonnées est asymptote à  $(\mathcal{C}_f)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \frac{e^x}{x^4} = +\infty$  donc  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$  au voisinage de  $+\infty$ .

b) Voir figure.

6. a) La fonction  $f$  est continue et négative sur l'intervalle  $[t, 2]$  pour tout  $t \in [1, 2[$  donc l'aire de  $S(t)$  est

$$\mathcal{A}(t) = -\int_t^2 f(x) dx = -[F(x)]_t^2 = F(t) - F(2).$$

b) L'aire de  $S(1)$  est  $\mathcal{A}(1) = e - F(2)$ .

Or l'aire du rectangle ABCD est :  $AB \cdot BC = 1 \cdot [e - F(2)] = e - F(2)$  donc  $\mathcal{A}(1) = \text{aire}(ABCD)$ .

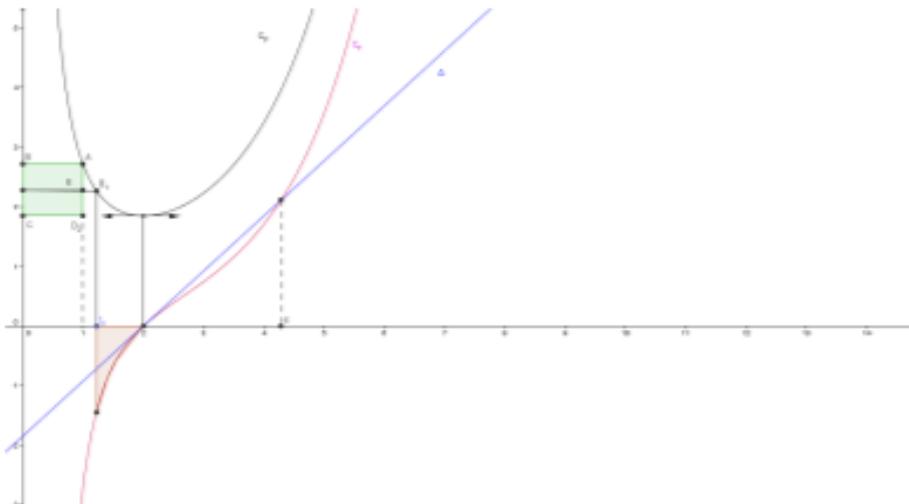
$$c) \mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(1) \Leftrightarrow F(2) - F(t) = \frac{1}{2} [F(2) - e] \Leftrightarrow F(t) = \frac{1}{2} [F(2) + e].$$

$F$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[1, 2[$ ,  $F([1, 2]) = ]F(2), e]$

et  $\frac{1}{2} [F(2) + e] \in ]F(2), e]$  donc l'équation  $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(1)$  admet une unique solution  $t_0$  dans  $[1, 2[$ .

d) Soit  $I$  le milieu du segment  $[BC]$ , l'ordonnée de  $I$  est  $F(t_0)$ . Soit  $J$  le point d'abscisse 2 de la courbe

$(\mathcal{C}_F)$ , la droite  $(IJ)$  coupe l'arc  $[AJ]$  de  $(\mathcal{C}_F)$  en un seul point  $K$  d'abscisse  $t_0$ .



**Exercice 3:**

1. On a :  $A(5, 0, 0)$ ,  $B(0, 5, 0)$ ,  $C(0, 0, 10)$ . Soit le plan  $(P) : 2x + 2y + z - 10 = 0$ .

$$10 + 0 + 0 - 10 = 0 \text{ donc } A \in (P) ; 0 + 10 + 0 - 10 = 0 \text{ donc } B \in (P) ;$$

$$0 + 0 + 10 - 10 = 0 \text{ donc } C \in (P) .$$

Ainsi  $P = (ABC)$  et par suite  $(ABC) : 2x + 2y + z - 10 = 0$ .

2. Soit  $(S)$  la sphère de centre  $I(3, 3, 3)$  et de rayon 3.

- a) La distance du point  $I$  au plan  $(ABC)$  est  $d(I, (ABC)) = \frac{|6 + 6 + 3 - 10|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{5}{3} < 3$  donc  $(S)$  et  $(ABC)$  sont sécant suivant un cercle.

- b) Une équation du plan  $(OAB)$  est  $z = 0$  donc  $d(I, (OAB)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3$ .

$$\text{Une équation du plan } (OAC) \text{ est } y = 0 \text{ donc } d(I, (OAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3 .$$

$$\text{Une équation du plan } (OBC) \text{ est } x = 0 \text{ donc } d(I, (OBC)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3 .$$

Donc  $(S)$  est tangente aux plans  $(OAB)$ ,  $(OAC)$  et  $(OBC)$ .

3. a)  $(S)$  est tangente aux plans  $(OAB)$ ,  $(OAC)$  et  $(OBC)$  donc  $S' = h(S)$  est tangente aux plans

$$h((OAB)) = (OAB) , h((OAC)) = (OAC) \text{ et } h((OBC)) = (OBC).$$

- b) Le centre de  $(S')$  est  $I' = h(I)$  donc  $I'(3k, 3k, 3k)$ .

$$d(I', (ABC)) = \frac{|6k + 6k + 3k - 10|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|15k - 10|}{3} .$$

Pour que  $(S')$  soit tangente au plan  $(ABC)$ , il faut et il suffit que

$$d(I', (ABC)) = 3|k| \Leftrightarrow \frac{|15k - 10|}{3} = 3|k| \Leftrightarrow |15k - 10| = 9|k| \Leftrightarrow 15k - 10 = 9k \text{ ou } 15k - 10 = -9k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{3} \text{ ou } k = \frac{5}{12} .$$

4. Lorsque  $k = \frac{5}{3}$ , l'image du point I par h est  $I'(5, 5, 5)$ ;  $I''$  est à l'extérieur du tétraèdre OABC.

Pour que la sphère ( $S'$ ) soit tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC, il faut que  $k = \frac{1}{15}$ . Donc le centre de ( $S'$ ) est  $I'\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$  et son rayon est  $3 \times \left|\frac{1}{15}\right| = \frac{1}{5}$ .

#### Exercice 4

1. Soit n un entier.

On a :  $7 = 7 \pmod{100}$ ,  $7^2 = 49 \pmod{100}$ ,  $7^3 = 43 \pmod{100}$  et  $7^4 = 1 \pmod{100}$

Il en résulte : Si  $n = 4p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , alors  $7^n = 1 \pmod{100}$

Si  $n = 4p + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , alors  $7^n = 7 \pmod{100}$

Si  $n = 4p + 2$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , alors  $7^n = 49 \pmod{100}$

Si  $n = 4p + 3$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , alors  $7^n = 43 \pmod{100}$

2. On a d'une part:  $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$ .

D'autre part :  $2009 = 4 \times 502 + 1$  donc  $7^{2009} = 7^{4 \times 502 + 1} \pmod{100} \Leftrightarrow 7^{2009} = 7 \pmod{100}$

$2010 = 4 \times 502 + 2$  donc  $7^{2010} = 7^{4 \times 502 + 2} \pmod{100} \Leftrightarrow 7^{2010} = 49 \pmod{100}$

$2011 = 4 \times 502 + 3$  donc  $7^{2011} = 7^{4 \times 502 + 3} \pmod{100} \Leftrightarrow 7^{2011} = 43 \pmod{100}$

D'où  $7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011} = 99 \pmod{100} \Leftrightarrow a = -1 \pmod{100}$ .

Ainsi, il existe un entier naturel k tel que  $a = 100k - 1$ .

3. a)  $a^{100} = (100k - 1)^{100} = \sum_{i=0}^{100} C_{100}^i (100k)^{100-i} (-1)^i$   
 $= (100k)^{100} - 100 \times (100k)^{99} + C_{100}^2 (100k)^{98} - C_{100}^3 (100k)^{97} + \dots + C_{100}^{98} (100k)^2 - 100 \times 100k + 1$   
 $= 100^2 [k^2 (100k)^{98} - k (100k)^{98} + k^2 C_{100}^2 (100k)^{97} - \dots + k^2 - k] + 1$

Par suite  $a^{100} = 1 \pmod{100^2}$

- b) On sait que  $a^{100} = 1 \pmod{100^2}$  donc  $a^{100} = 100^2 + 1 \pmod{100^2}$  d'où les quatre derniers chiffres de  $a^{100}$  sont 0001.