CORRECTION : EPREUVE MATHEMATIQUES / Session de JUIN 2019 / BAC MATHS

Exercice N°1 :

1°) a) $(AB)\perp(AC)$, ζ' de diamètre $[CM]$ et $H\in\zeta'$ donc $(HC)\perp(MH)$ or $H\in(HC)$

donc $(AC)\perp(MH)$ ainsi $(AB)\parallel(MH)$

b) $AMA'B$ est un losange donc $(AB)\parallel(A'M)$ et $(AB)\parallel(MH)$ d'où $(A'M)\parallel(MH)$ ce qui prouve que H, M et A' sont alignés

c) • dans le triangle ABC on a $(AB)\parallel(MH)$, $H\in[AC]$ et $M\in[BC]$ donc d'après te théorème de Thalès : $\frac{CM}{CB}=\frac{HM}{AB}=\frac{CH}{AC}$ et on a $\frac{CM}{CB}=\frac{1}{3}$ donc $\frac{HM}{AB}=\frac{1}{3}$ par suite $HM=\frac{1}{3}AB$

• Le triangle AMH est rectangle en H donc d'après le théorème du Pythagore :
Et puisque $AB=AM$ on aura $AB^2=AH^2+HM^2\Rightarrow AH^2=AB^2-HM^2$

2°) a) • Angle de S: $\left(\widehat{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HM}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

• Rapport de $S: k=\frac{HM}{HA}$. On a : $HM=\frac{1}{3}AB$ et $AH^2=AB^2-HM^2$

Donc $AH^2=AB^2-\frac{1}{9}AB^2=\frac{8}{9}AB^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{AH^2}=\frac{9}{8} \Rightarrow \frac{AB}{AH}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

il en résulte : $k=\frac{HM}{HA}=\frac{AB}{3HA}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) • Angle de S est $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ d'où $S((AI))\perp(AI)$ et $S(A)=M\in S((AI))$ d'où $S((AI))=(BC)$

• De même $S((MH))\perp(MH)$ et $S(H)=H\in S((MH))$ d'où $S((MH))=(AC)$

• $A'\in(MH)\cap(AI)$ d'où $S(A')\in S((MH))\cap S((AI))\Rightarrow S(A')\in(AC)\cap(BC)\Rightarrow S(A')=C$

3°) • une similitude conserve les milieux

• I est le milieu de $[AA']$ donc $S(I)$ est le milieu de $S([AA'])=[CM]$ d'où $S(I)=I'$

• $S(I)=I'\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HI'}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $H\in\zeta'$ de rayon $[I'H]$ donc (HI) est tangente à ζ' en H

4°) a) $S_{(AH)}$: antidéplacement $\Rightarrow S_{(AH)}$ est une similitude indirecte de rapport 1

• S' est la composée de trois similitudes dont <u>deux indirectes</u> de rapport 1 et <u>une directe</u> de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ce qui prouve que S' est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$

• $S'(H)=S_{(AH)}\circ S\circ S_{(AH)}(H)=S_{(AH)}\circ S(H)=S_{(AH)}(H)=H\Rightarrow H$ est le centre de S'

b) • $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'A}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{A'M}}\right)[2\pi]$ ($[A'A)$ bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'M}}\right)$)

• $\begin{cases}\left(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'A}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)[2\pi]\\ \left(\widehat{\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{A'M}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CN}}\right)[2\pi]\end{cases}$ (Deux angles qui interceptent le même arc dans le cercle)

$\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CN}}\right)[2\pi]$ ainsi dans le triangle MNC , $\left(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CH}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CH},\overrightarrow{CN}}\right)[2\pi]$

Donc $[CH)$ est la bissectrice de l'angle $N\hat{C}M$ et $(CH)\perp(MN)$ d'où (CH) est la médiatrice de $[MN]$

$\Rightarrow CM = CN$ ce qui prouve que MNC est isocèle en C

c) • $S'(A) = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}(A) = S_{(AH)} \circ S(A) = S_{(AH)}(M) = N$

• $S'(A) = N \Rightarrow$ angle de S': $\left(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HN}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice N°2:

1°) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\frac{-4}{-1} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow A$, B et C ne sont pas alignés

b) $z_A = 1 \Rightarrow A \in P$, $z_B = 1 \Rightarrow B \in P$, $z_C = 1 \Rightarrow C \in P$
et A , B et C déterminent un seul plan P donc il a pour équation $z = 1$

<u>**Ou bien :**</u> $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normale de P

$\Rightarrow -4z + d = 0$, $A \in P \Rightarrow -4 + d = 0 \Rightarrow d = 4$ d'où $P: -4z + 4 = 0 \Rightarrow P: z = 1$

2°) a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4 - 1 = x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5 = \sqrt{5}^2$

$\Rightarrow S$ est une sphère de rayon $R = \sqrt{5}$ et de centre $\Omega(0,0,2)$

b) $d(\Omega , P) = \frac{|z_\Omega - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{1} = 1 < \sqrt{5} \Rightarrow S$ et P sont sécants suivant le cercle ζ de rayon $\sqrt{\sqrt{5}^2 - 1} = 2$

Comme $\overrightarrow{\Omega I}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = -\vec{n} \Rightarrow (\Omega I) \perp P$ et $I \in P$ donc I est le projeté orthogonale de Ω sur P

Ce qui prouve que I est le centre de ζ

3°) a) $d(\Omega_\lambda , P) = \frac{|z_{\Omega_\lambda} - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = |\lambda - 1|$

On sait que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ on a : $(\lambda-1)^2 < (\lambda-1)^2 + 4$ d'où $\sqrt{(\lambda-1)^2} < \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4}$

C'est-à-dire $|\lambda - 1| < \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4} \Rightarrow |\lambda - 1| < R_\lambda \Rightarrow S_\lambda$ et P sont sécants suivant un cercle ϕ

• de rayon $r = \sqrt{R_\lambda^2 - |\lambda - 1|^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4 - (\lambda-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

• de centre le projeté orthogonale de Ω_λ sur P ; $\overrightarrow{\Omega_\lambda I}\begin{pmatrix}0\\0\\1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\vec{n} \Rightarrow (\Omega_\lambda I) \perp P$ et $I \in P$

$\Rightarrow I$ est le centre de ϕ. Finalement $\phi = \zeta$ et par suite $S_\lambda \cap P = \zeta$

b) $D \in S_{\lambda_0} \Rightarrow \Omega_{\lambda_0} D = R_{\lambda_0} \Rightarrow \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-1-\lambda_0)^2} = \sqrt{(\lambda_0 - 1)^2 + 4}$

$\Rightarrow \lambda_0^2 + 2\lambda_0 + 17 = \lambda_0^2 - 2\lambda_0 + 5 \Rightarrow 4\lambda_0 = -12 \Rightarrow \lambda_0 = -3$

c) S_{λ_0} à pour centre $\Omega_{\lambda_0}(0,0,-3)$ et de rayon $R_{\lambda_0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Soit h l'homothétie de centre M et de rapport k qui envoie S en S_{λ_0}

On a : $h(S)=S_{\lambda_0}$ donne $\overrightarrow{M\Omega_{\lambda_0}}=k\ \overrightarrow{M\Omega}$ et $R_{\lambda_0}=|k|R$

$2\sqrt{5}=|k|\sqrt{5}\ \Rightarrow |k|=2$ donc $k=2$ ou $k=-2$

- Pour $k=2$ on a : $\overrightarrow{M\Omega_{\lambda_0}}=k\ \overrightarrow{M\Omega}\ \Rightarrow \begin{cases}-x_M=-2x_M\\ -y_M=-2y_M\\ -3-z_M=-2(2-z_M)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_M=0\\ y_M=0\\ -3z_M=-1\end{cases} \Rightarrow M\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$
- Pour $k=-2$ on a : $\overrightarrow{M\Omega_{\lambda_0}}=k\ \overrightarrow{M\Omega}\ \Rightarrow \begin{cases}-x_M=2x_M\\ -y_M=2y_M\\ -3-z_M=2(2-z_M)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_M=0\\ y_M=0\Rightarrow M(0,0,7)\\ z_M=7\end{cases}$

<u>Conclusion :</u> il existe deux homothéties h_1 de centre $M\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$ et de rapport 2 , h_2 de centre $M(0,0,7)$ et de rapport (-2) qui transforment S en S_{λ_0}

<u>Exercice N°3 :</u>

1°) a) $29\times 2-13\times 4=58-52=6$

b) • $29x-13y=29\times 2-13\times 4 \Leftrightarrow 29(x-2)=13(y-4)$

$\Leftrightarrow 13$ divise $29(x-2)$ et $29\wedge 13=1$ divise 6 donc d'après lemme de Gauss

13 divise $(x-2)$ ainsi $x-2=13k$; $k\in\mathbb{Z}$ par suite $x=2+13k$; $k\in\mathbb{Z}$

• $29(13k)=13(y-4)\ \Leftrightarrow\ 29k=y-4\ \Leftrightarrow\ y=4+29k$; $k\in\mathbb{Z}$

<u>Conclusion :</u> $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(2+13k,4+29k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

2°) • 29 est un nombre premier et 29 ne divise pas 2

D'où d'après le petit théorème de Fermat on a : $2^{29-1}\equiv 1[\text{mod}\,29] \Rightarrow 2^{28}\equiv 1[\text{mod}\,29]$

• $\begin{cases}2^{28}\equiv 1[\text{mod}\,29]\\ 2^{29}\equiv 2[\text{mod}\,29]\end{cases} \Rightarrow 2^{28}\times 2^{29}\equiv 2[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow 2^{57}\equiv 2[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow -2^{57}\equiv -2[\text{mod}\,29]$

$\Rightarrow (-2)^{57}\equiv -2[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow \left((-2)^3\right)^{19}\equiv -2[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow (-8)^{19}\equiv -2[\text{mod}\,29]$

• Donc -8 est solution de (E')

3°) a) • Si x_0 est un multiple de 29 alors $x_0^{19}\equiv 0[\text{mod}\,29]$ donc x_0 n'est pas solution de (E')

D'où si x_0 est solution de (E') alors x_0 n'est pas multiple de 29

• $x_0^{19}\equiv 1[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_0^{28}\equiv 1[\text{mod}\,29]\quad \text{(Petit théorème de Fermat)}\\ 29 \text{ est un nombre premier}\end{array}\right.$

b) • x_0 est solution de (E') alors $x_0^{19}\equiv -2[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow \left(x_0^{19}\right)^3\equiv(-2)^3[\text{mod}\,29]$

$\Rightarrow \left(x_0^{19}\right)^3\equiv(-2)^3[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow x_0^{57}\equiv -8[\text{mod}\,29]$

• $\begin{cases}x_0^{57}\equiv -8[\text{mod}\,29]\ \Leftrightarrow\ x_0\times x_0^{56}\equiv -8[\text{mod}\,29]\\ \left(x_0^{28}\right)^2\equiv 1[\text{mod}\,29]\ \Leftrightarrow\ x_0^{56}\equiv 1[\text{mod}\,29]\end{cases}$

c) x est solution de $(E')\ \Rightarrow x\equiv -8[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow x=-8+29k$; $k\in\mathbb{Z}$

Réciproquement : $x=-8+29k\ \Rightarrow x\equiv -8[\text{mod}\,29]\ \Rightarrow x^{19}\equiv(-8)^{19}[\text{mod}\,29]$

et -8 est solution de (E') c'est-à-dire $(-8)^{19}\equiv -2[\text{mod}\,29]$

Donc $x^{19} \equiv -2[\bmod 29] \Rightarrow x$ est solution de (E')

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}} = \{-8+29k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $(x-3)^{19} \equiv -2[\bmod 29] \Leftrightarrow x-3$ est solution de $(\mathrm{E}') \Leftrightarrow x-3=-8+29k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=-5+29k\ ;\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}}=\{-5+29k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

4°) • $(x-3)^{19} \equiv -2[\bmod 29] \Leftrightarrow x-3 \equiv -8[\bmod 29]$

• On a 13 ne divise pas $x-3$ donc $(x-3)^{12} \equiv 1[\bmod 13] \Leftrightarrow x-3 \equiv -2[\bmod 13]$

D'où $\begin{cases}(x-3)^{19} \equiv -2[\bmod 29]\\(x-3)^{13} \equiv -2[\bmod 13]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3 \equiv -8[\bmod 29]\\x-3 \equiv -2[\bmod 13]\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-3 \equiv -8+29p\\x-3 \equiv -2+13q\end{cases},\ (p,q)\in\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \begin{cases}x=-5+29p\\x=1+13q\end{cases},\ (p,q)\in\mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow x-x=-5+29p-1-13q \Leftrightarrow 0=-6+29p-13q \Leftrightarrow 29p-13q=6\ ;\ (p,q)\in\mathbb{Z}^2$

D'où p et q sont solutions de (E). Ainsi : $p=2+13k$ et $q=4+29k$; $k\in\mathbb{Z}$

Par suite $x=-5+29(2+13k)=53+377k\ ;\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}}=\{53+377k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice N°4 :

1°) a) $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{\left(1-e^{-x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{-x}}}=\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1-e^{-x}}}>0$, f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

et $\mathrm{f}([0,+\infty[)=\left[\mathrm{f}(0),\lim\limits_{+\infty}\mathrm{f}\right[=[0,1[\Rightarrow \mathrm{f}$ possède une fonction réciproque g définie sur $[0,1[$

b) $y\in[0,+\infty[\ , x\in[0,1[\ , g(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{1-e^{-y}}=x \Leftrightarrow 1-e^{-y}=x^2$

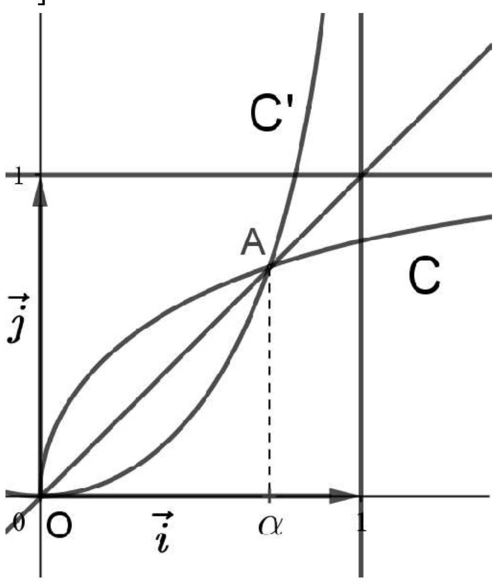
$\Leftrightarrow e^{-y}=1-x^2 \Leftrightarrow -y=\ln(1-x^2) \Leftrightarrow y=-\ln(1-x^2) \Leftrightarrow g(x)=-\ln(1-x^2)$

c) $g(x)=x \Leftrightarrow g(x)-x=0$, on pose $h(x)=g(x)-x$, $x\in[0,1[$, h est continue sur $[0,1[$

et $h(0,7)\times h(0,8)\simeq(-0,0267)\times 0,222\simeq -0,0059<0$

Donc $h(x)=0$ $(g(x)=x)$ admet une solution $\alpha\in[0.7;0.8]$

d) Voir figure annexe



2°) a) f est continue sur $[0,+\infty[$, g est dérivable sur $[0,1[$

et $g([0,1[)=[0,+\infty[$ d'où φ est dérivable sur $[0,1[$

et $\varphi'(x)=g'(x)\mathrm{f}(g(x))$

$\Rightarrow \varphi'(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}\times x=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$

b) $a+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{c}{1-x}=\dfrac{a(1+x)(1-x)+b(1-x)+c(1+x)}{(1+x)(1-x)}$

$=\dfrac{-ax^2+x(c-b)+a+b+c}{(1+x)(1-x)}$

$\dfrac{2x^2}{1-x^2}=a+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{c}{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases}-a=2\\c-b=0\\a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\c=b=1\end{cases}$

c) $\varphi'(x)=-2+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \varphi(x)=-2x+\ln(1+x)-\ln(1-x)+cte$

$$\varphi(0)=\int_0^{g(0)}\mathrm{f}(x)dx=\int_0^0\mathrm{f}(x)dx \Rightarrow cte=0 \text{ donc } \varphi(x)=-2x+\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ x\in[0,1[$$

d) $\mathcal{A}=\int_0^\alpha |f(x)-g(x)|dx$ (unité d'aire)

- Par raison de symétrie

$$\int_0^\alpha |\mathrm{f}(x)-g(x)|dx=2\int_0^\alpha(\mathrm{f}(x)-x)dx=2\left[\int_0^\alpha \mathrm{f}(x)dx-aire(OAB)\right]\ ;\ B(\alpha,0)$$

- $\int_0^\alpha f(x)\,dx \rightarrow$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$ et $aire(OAB)=\frac{OB\times AB}{2}=\frac{\alpha^2}{2}$
- On sait que $g(\alpha)=\alpha$ d'où $\int_0^\alpha \mathrm{f}(x)dx=\int_0^{g(\alpha)}\mathrm{f}(x)dx=\varphi(\alpha)$ il résulte $\mathcal{A}=2\left(\varphi(\alpha)-\frac{\alpha^2}{2}\right)$

3°) a) $\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}} S_n(t)dt=\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}}2\left(\sum_{k=1}^n t^{2k-1}\right)dt=\sum_{k=1}^n\left(2\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}}t^{2k-1}dt\right)$

et $2\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}}t^{2k-1}dt=2\left[\frac{t^{2k}}{2k}\right]_0^{\frac{\sqrt3}{3}}=\frac{\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^{2k}}{k}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt3^2}\right)^k}{k}=\frac{\left(\frac13\right)^k}{k}=\frac{1}{k.3^k} \Rightarrow \int_0^{\frac{\sqrt3}{3}}S_n(t)dt=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k.3^k}=u_n$

b) $S_n(t)=2\sum_{k=1}^n t^{2k-1}=\frac{2}{t}\sum_{k=1}^n (t^2)^k$ et $\sum_{k=1}^n (t^2)^k=t^2\times\frac{1-(t^2)^n}{1-t^2}$ Somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme t^2 de raison t^2

Par suite $S_n(t)=\frac{2}{t}\times t^2\times\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}=(1-t^{2n})\frac{2t}{1-t^2}=(1-t^{2n})g'(t)$, $n\geq1$ et $t\in[0,1[$

c) $0\leq t\leq\frac{\sqrt3}{3} \Leftrightarrow 0\leq t^{2n}\leq\frac{1}{3^n} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{3^n}\leq 1-t^{2n}\leq 1 \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{3^n}\right)g'(t)\leq(1-t^{2n})g'(t)\leq g'(t)$

car $g'(x)\geq 0$

D'où pour $0\leq t\leq\frac{\sqrt3}{3}$ on a : $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g'(t)\leq S_n(t)\leq g'(t)$ (*)

d) On intégrant membre à membre l'inégalité (*) on aura :

$$\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}}g'(t)dt\leq\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}}S_n(t)dt\leq\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}}g'(t)dt \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{3^n}\right)[g(t)]_0^{\frac{\sqrt3}{3}}\leq u_n\leq[g(t)]_0^{\frac{\sqrt3}{3}}$$

D'où $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)-\underbrace{g(0)}_{0}\right)\leq u_n\leq g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)-\underbrace{g(0)}_{0} \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{3^n}\right)g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)\leq u_n\leq g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)$

4°) $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)\leq u_n\leq g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{1}{3^n}}_{0}\right)=1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)=g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)=-\ln\left(1-\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^2\right)=-\ln\left(1-\frac13\right)=-\ln\frac23=\ln\frac32$$

Donc la suite (u_n) converge vers $\ln\frac32$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=g\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)$