Série : Probabilité conditionnelle

Classe : 4 $^{\text{ème}}$ M-SE

Prof: Abidi Farid
Mathématiques
Année scolaire : 2019-2020

Exercice 1 ☆☆☆☆☆

Une malade est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche $0,5\%$ de ce cheptel.

1 On choisit au hasard un animal dans ce cheptel. Quel est la probabilité qu'il soit malade ?

2 ⓐ On choisit successivement et au hasard dix animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer son espérance mathématiques.

ⓑ On désigne par :

- A l'évènement « aucun animal est malade parmi les dix » ;
- B l'évènement « au moins un animal est malade parmi les dix ».

Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

3 On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est $0,8$. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est $0,9$. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».

ⓐ Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

ⓑ Calculer la probabilité de l'évènement T.

ⓒ Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice 2 ☆☆☆☆☆

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$. On définit les évènements suivants :

- A : « le jardinier a choisit le lot 1 »
- B :« le jardinier a choisit le lot 2 »

◇ J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1 ⓐ Quelle loi de probabilité suit X le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

ⓑ Quelle est l'espérance mathématiques de X ?

ⓒ Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

ⓓ Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2 ⓐ Montrer que $p(J_n \mid B) = C_{50}^{n}\, 2^{-50}$.

ⓑ En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

ⓒ On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé.
Établir que $p_n = \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$.

ⓓ Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?.

Exercice 3 ☆☆☆☆☆

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n urnes U_1, U_2, ... et U_n de composition comme suit : U_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc et chacune des autres urnes contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On tire au hasard un jeton de U_1 qu'on place dans U_2, puis on tire un jeton de U_2 qu'on place dans U_3 et ainsi de suite ... on tire un jeton de U_{n-1} qu'on place dans U_n.
Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note E_k l'évènement « le jeton tiré de U_k est blanc ».

1 ⓐ Calculer $p(E_1)$, $p\left(E_2 \mid E_1\right)$ et $p\left(E_2 \mid \overline{E_1}\right)$. En déduire $p(E_2)$.

ⓑ Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note $p_k = p(E_k)$.
Montrer que $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

2 On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et , pour tout entier $k \geq 1$, $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$.
On considère la suite (v_k) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_k = u_k - \frac{1}{2}$.

ⓐ Montrer que (v_k) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

ⓑ Donner l'expression de v_k en fonction de k.

3 ⓐ En déduire la valeur de p_k.

ⓑ Déterminer le plus petit entier k telle que $0,4999 < p_k < 5$.

Exercice 1 ☆☆☆☆☆

1 La probabilité que l'animal soit malade est $\dfrac{0,5}{100} = 0,005$.

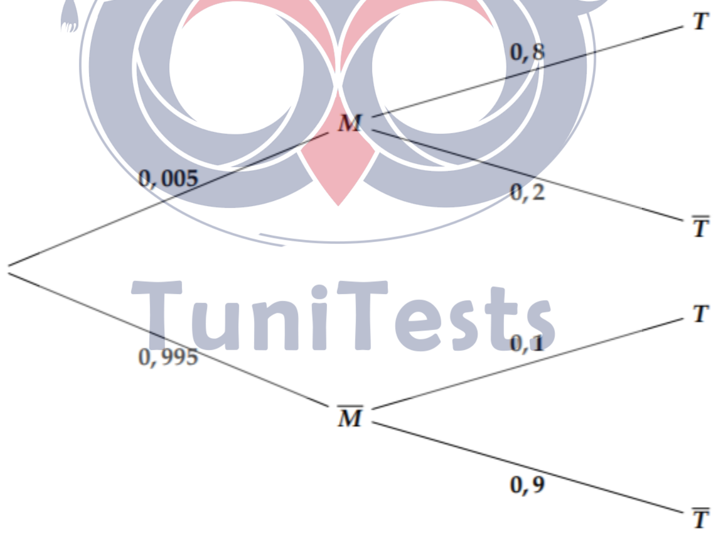
2 ⓐ On suppose que le cheptel est assez important donc le tirage successif de **10** animaux est une épreuve de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,005$.

On a $E(X) = n \times p = 0,05$.

ⓑ On a $p(A) = C_{10}^{0} \times (0,005)^0 \times (0,995)^{10} = 0,995^{10} \simeq 0,951$.

On a $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,995^{10} \simeq 0,049$.

3 ⓐ On a l'arbre suivant :



ⓑ On a : $p(T) = p(M \cap T + p(\overline{M} \cap T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,1035$.

ⓒ $p(M \mid T) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0,005 \times 0,8}{0,1035} \simeq 0,038$.

Exercice 2 ☆☆☆☆☆

1 ⓐ la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

ⓑ L'espérance mathématique de X est $E(X) = n \times p = 12,5$ (tulipes jaunes).

ⓒ On a $p(X = n) = C_{50}^{n} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-n} = C_{50}^{n} \dfrac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

ⓓ $p(X = 15) = C_{50}^{15} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^1 5 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{35} \simeq 0,089$.

2 ⓐ Si le lot choisi est **2** , on a autant de chances d'avoir une tulipe jaune que le contraire. La loi binomiale ici a pour paramètres $n = 50$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir n tulipes jaunes est donc :

$p\left(J_n \mid B\right) = C_{50}^{n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{50-n} = C_{50}^{n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{50} = C_{50}^{n} \times 2^{-50}$.

ⓑ De la même façon que précédemment $p\left(J_n \mid A\right) = C_{50}^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = C_{50}^n \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

A et B forment une partition de l'univers , donc d'après la formule de probabilité totale :

$p(J_n) = p\left(J_n \cap A\right) + p\left(J_n \cap B\right) = p(A)\left(J_n \mid A\right) + p(B)\left(J_n \mid B\right)$

$= \frac{1}{2} \times C_{50}^n \frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2} \times C_{50}^n \times 2^{-50} = \frac{1}{2} C_{50}^n \frac{3^{50-n} + 2^{50}}{4^{50}}$.

ⓒ $p_n = p\left(A \mid J_n\right) = \frac{p(A \cap J_n}{p(J_n)} = \frac{p\left(J_n \mid A\right) \times p(A)}{p(J_n)} = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$.

ⓓ $p_n \geq 0,99 \iff \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}} \geq 0,99 \iff 3^{50-n} \geq 0,9\left(3^{50-n} + 2^{50}\right)$

$\iff 0,1 \times 3^{50-n} \geq 0,9 \times 2^{50} \iff (50-n)ln3 \geq ln\left(9 \times 2^{50}\right) \iff n \leq 50 - \frac{ln\left(2^{50} \times 9\right)}{ln3}$

d'où $n \leq 16,4$. Par suite ,il faut que $n < 17$.

Interprétation : si le nombre de tulipes jaunes et peu élevé (ici moins de 17), la probabilité d'avoir choisi le lot **1** est très grande; si ce nombre de tulipes jaunes se rapproche de **25** sur **50**, la probabilité est grande que le lot choisi soit le lot **2**.

Exercice 3 ☆☆☆☆☆

1 ⓐ $p(E_1) = p_1 = \frac{1}{3}$.

L'urne U_2 contient à présent **2** jetons blancs et **1** jeton noir donc $p(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{3}$ et $p(E_2 \mid \overline{E_1}) = \frac{1}{3}$.

$p(E_2) = p(E_1) \times p(E_2 \mid E_1) + p(\overline{E_1}) \times p(E_2 \mid \overline{E_1}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

ⓑ $p_{k+1} = p(E_{k+1}) = p(E_{k+1} \cap E_k) + p(E_{k+1} \cap \overline{E_k}) = p(E_k) \times p(E_{k+1} \mid E_k) + p(\overline{E_k}) \times p(E_{k+1} \mid \overline{E_k}) = p_k \times \frac{2}{3} + (1 - p_k) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

2 On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et , pour tout entier $k \geq 1$, $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$.

ⓐ $v_{k+1} = u_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(u_k - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}v_k$. Donc (v_k) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

ⓑ On a $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

donc pour tout entier $k \geq 1$, $v_k = v_1 \times q^{k-1} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

3 ⓐ $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$ donc la suite (u_n) est la suite (p_n), d'où $p_k = u_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

$0,4999 < p_k < 0,5 \iff 0,4999 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k < 0,5 \iff -0,0001 < -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k < 0$

$\iff 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^k < 0,0002 \iff kln\left(\frac{1}{3}\right) < ln(0,0002) \iff k > \frac{ln(0,0002)}{ln\left(\frac{1}{3}\right)}$.

d'où $k > 7,75$. Donc , on a : $0,4999 < p_k < 0,5$ pour $k = 8$.