|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| > | **Classe : 4 ème Math 2-3** | **Devoir de synthèse N°3****Mathématiques** | **Le : 08-05-2014****Durée  : 4h** |

**Exercice 1 : ( 3 pts )**

 Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1- Le quotient de la division euclidienne de ( - 43719 ) par ( - 02011 ) est égale à 21 .

 2- Pour tout entier naturel non nul n ,  .

 .3- Pour tout entier n,  .

 4- Pour toute solution (x,y) dans Z×Z de l'équation 11x - 40y =19 on a x = 4 (mod 5 )

**Exercice 2 : ( 4 pts )**

Le tableau ci-dessous présente l’évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs du site

« Géogebra à Tunis au cours des huit premières semaines suivant sa création.



1- a) Représenter le nuage de points Mi(xi, yi) dans le plan muni d’un repère orthogonal, en prenant pour unités 1 cm pour une semaine sur l’axe des abscisses et 1 cm pour 50 visiteurs sur l’axe des ordonnées.

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points, et le placer dans le repère précédent (on arrondira l’ordonnée du point G à l’unité près).

2- a) Déterminer D l’équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à 10-2 prés.

b) Tracer la droite D dans le repère précédent.

c) En utilisant l’ajustement affine précédent, estimer le nombre de visiteurs lors de la 10ème semaine suivant la création du site.

3- On pose z =ln(x).

1. Recopier puis compléter le tableau suivant :



b) Calculer ρ le coefficient de corrélation de la série statistique (Z, Y) .

c) On admet que l’équation de la droite Δ d’ajustement affine de y en z, obtenue par la méthode des

moindres carrés, est : **y = (133.69)z +(184.29).**

En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la 10eme semaine.

d) A l’aide de ce nouvel ajustement, déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 600.

4- Le temps T ( exprimer en heure) d’une visite d’un visiteur de ce site suit la loi exponentielle de paramètre 0.2

a) Calculer la probabilité qu’un visiteur dépasse 1 heure.

b) Sachant qu’un visiteur de ce site a dépassé une heure, quelle est la probabilité de ne pas dépasser 3 heures ?

c) 10 personnes sont en visite indépendante de ce site. Calculer la probabilité qu’au moins deux d’entre elles, dépassent une heure de navigation?

**Exercice 3 : ( 4 pts )**

L’espace ( E ) muni d’un repère orthonormé direct .

On considère les points A ( -1 , 1 , 1 ) ; B ( 1 , 1 , 2 ) ; C ( 3 , -2 , 0 ) et D ( 0 , -1 , 1 ) .

1- a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ = $\vec{AB}$ ∧ $\vec{AC}$ .

b) En déduire qu’une équation cartésienne du plan (ABC) est : x + 2y – 2z + 1 = 0 .

c) Calculer le volume V du tétraèdre ABCD .

d) Calculer la distance du point D au plan ( ABC ) .

2- Soit l’ensemble S = { M ( x , y , z ) ∈ ( E ) tels que x² + y² + z² + 2y – 2z + 1 = 0 } .Justifier que S est une sphère de centre D et tangente au plan ( ABC ) .

3- Soient t la translation de vecteur $\frac{1}{9}$ $\vec{v}$ et P le plan passant par D et parallèle à ( ABC ) .

1. Vérifier que les coordonnées du point H image de D par t sont ($ \frac{1}{3}$ , $-\frac{1}{3}$ , $\frac{1}{3}$ ) .
2. Montrer que t ( P ) = ( ABC ) ; en déduire le point de contact de ( ABC ) et S .

4- Soit h l’homothétie de centre O qui transforme le plan ( ABC ) au plan P .

1. Calculer les coordonnées du point H’ l’intersection de la droite ( OH ) et le plan P .
2. En déduire le rapport k de h .

c)Préciser le centre , le rayon de la sphère S’ = h ( S ) puis caractériser S’ ∩P

**Exercice 4 : ( 5 pts )**

Soit h(x) = e x ln(1 + e – x) et H(x) =  définies sur [0,+∞[.

1- a) Montrer que H est dérivable sur [0, + ∞[ et calculer H'(x). En déduire que H est strictement croissante sur [0,+∞[.

b) Vérifier que : pour tout x∈[0,+∞[,  h(x) = h’(x) + ; en déduire l’expression de H(x).

2- a) Vérifier que h(x) =  et calculer la limite de h(x) quand x tend vers +∞.

 b) Déterminer la limite de H(x) quand x tend vers +∞ et montrer que.

3- On considère la fonction ϕ définie sur [0,+∞[ par : ϕ(x) = ex ln(1+e-x) + ln(1+ex) – x – 1 et la suite

 (S n) définie sur IN\* par : S n = 

 a) Déterminer le sens de variation puis le signe de la fonction u définie sur IR+ par : u(t) = ln(1 + t) – t.

 Montrer alors que la fonction ϕ est décroissante.

 b) Montrer que : pour tout n∈IN\*et pour tout entier k tel que 0 ≤ k ≤ n-1,

.

 c) En déduire que, pour tout n ∈ IN\*, A + ϕ(2) ≤ S n ≤ A + ϕ(1) où A = .

 En déduire que :  = A

4- On pose, pour tout n ∈ IN\*, Un = Sn – [ϕ(1)+ϕ(2)]

 a) A l’aide d’une calculatrice, calculer ϕ (1) - ϕ(2).

En déduire que : pour tout n ∈ IN\*, | Un – A | ≤ .

b) Déterminer un entier naturel n tel que Un soit une valeur approchée de A à 10-2 près.

**Exercice 5 : ( 4 pts )**

**A/** Soit l’équation différentielle (E) : y

1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle  : 
2. Soit f une fonction dérivable sur IR.

 Montrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction f ² est solution de 

1. Déterminer la solution f de (E) qui prend la valeur  pour x = 0

**B/** Soit f la fonction définie sur IR par f(x) =.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a) Dresser le tableau de variation de f

b) Tracer la courbe C

1. Dans cette partie on se propose de calculer l’aire A exprimée en unité d’aire de la région du

 plan délimitée par la courbe C et les droites d’équations 

Soit g la fonction définie sur 

1. Exprimer A à l’aide d’une intégrale
2. Vérifier que pour tout x ∈ IR ,  ; en déduire que 
3. Montrer alors que pour tout x ∈ IR , 
4. Calculer alors A .