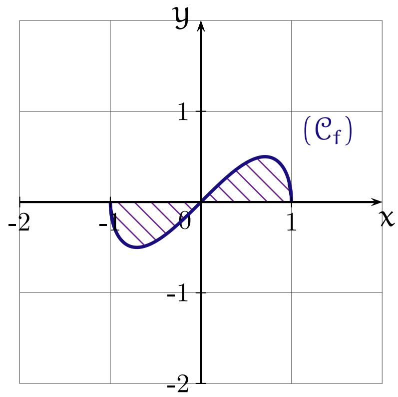
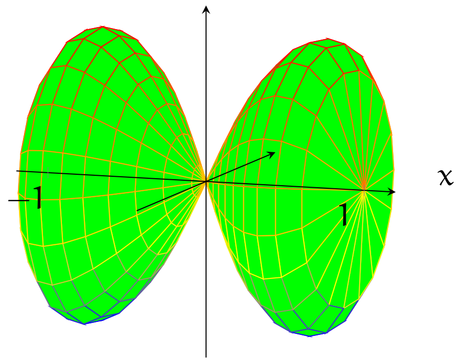
Exercice 1 (*3 points*)



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-contre dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



1. Calculer l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations respectives $x = -1$, $x = 1$ et $y = 0$.

2. Calculer le volume, en u v, du solide engendré par rotation de (C) autour de l'axe des abscisses.

Exercice 2 (*5 points*)

1. a) Déterminer le reste modulo 13 de 5^4 .

b) En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers 5^{4k} , 5^{4k+1} , 5^{4k+2} et 5^{4k+3} avec $k \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne par 13 de : $a = 1318^{2015} + 91^{2014}$.

d) Déterminer les entiers naturels n tels que : $5^{2n} + 5^n \equiv 0 (\mathrm{mod} 13)$.

2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4u_n = 5^n - 1$.

b) Montrer que u_{2016} est divisible par 13 .

c) En utilisant la question **1) b)** déterminer suivant les valeurs de n les restes modulo 13 de u_n .

Exercice 3 (*6 points*)

On considère les fonctions f et F définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par :$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.
On donne ci-joint à la page 3/3, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

a) Montrer que G est dérivable sur I et que $G'(x) = 1$ pour tout x de I.

b) En déduire G(x) pour tout x de I.

c) Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

a) Vérifier que $u_1 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) A laide d'une intégration par partie, montrer que $u_2 = -\dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}dt$.

c) En déduire que $u_2 = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)(\sqrt{2})^{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(\sqrt{2})^n}$.

e) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4

(6 points)

On considère dans le plan orienté un triangle ABC tel que AC = 4, AB = 2 et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
On désigne par Ω le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Soit f la similitude directe qui transforme A en C et B en A.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Montrer que Ω est le centre de f.

c) On désigne par E le symétrique de Ω par rapport à la droite (AB) et par F le symétrique de Ω par rapport à la droite (AC).

Montrer que A est le milieu de $[EF]$ et que $f(E) = F$.

2. Soit g la similitude indirecte qui transforme E en Ω et Ω en F.

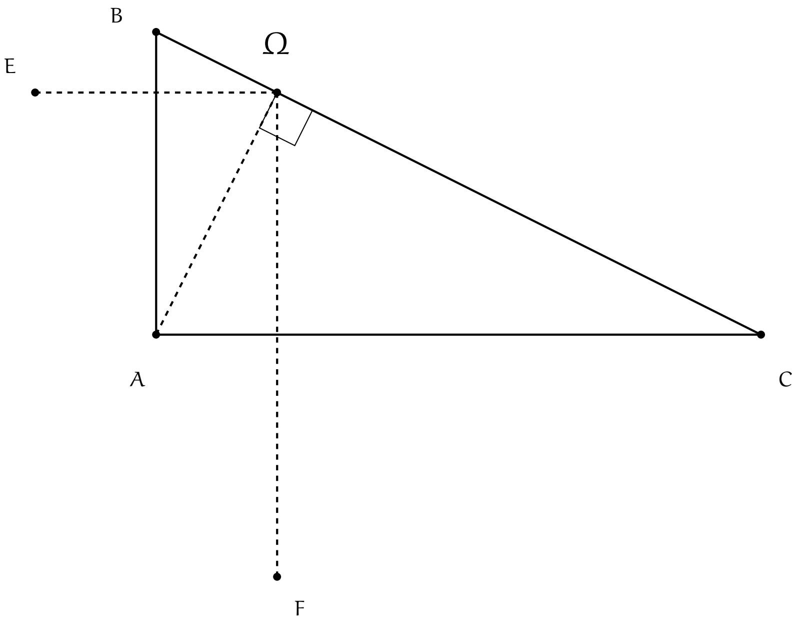
a) Déterminer le rapport de g.On note ω le centre de g .

b) Déterminer $(g \circ g)(E)$ .En déduire que ω appartient à la droite (EF).

3. a) Déterminer $(g \circ f^{-1})(\Omega)$ et $(g \circ f^{-1})(F)$. En déduire que $g \circ f^{-1} = S_{(AC)}$.

b) Déterminer alors $g(A)$ et $g(B)$.En déduire que ω appartient à la droite (BC).

c) Construire alors ω et l'axe Δ de g.


B
E
Ω
A
C
F