Lycée Pilote de Béja		**Mohamed Hedi Ghomriani**
	Devoir de synthése N°2	
Classe : 4^{eme} Maths		**Durée : 4 h** 25/02/2022

Exercice1(5points)

$\mathbf{ABC}$ est un triangle équilatéral direct. $\mathbf{I, J}$ et $\mathbf{K}$ les milieux respectifs des segments $[BC], [AC]$ et $[BA]$.
Répondre par vrai ou faux en **justifiant**

1) $T_{\overrightarrow{IA}} o S_{(BC)} = S_{(JK)}$
2) $T_{\overrightarrow{BI}} o\, h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)} = h_{\left(\Omega,\frac{1}{2}\right)}$ tel que $\Omega = S_J(B)$
3) $R_{\left(B,-\frac{2\pi}{3}\right)} o\, h_{\left(B,-\frac{1}{2}\right)}(C) = K$
4) $S_{(AI)} o\, h_{\left(I,\frac{3}{2}\right)} o\, S_{(BC)} = h_{\left(I,-\frac{3}{2}\right)}$
5) $(KC) \cap (BJ) = \{O\}$, $\mathbf{S}$ est une similitude directe qui transforme le triangle $\mathbf{IJK}$ en $\mathbf{ABC}$
alors $S\, o\, h_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}$ est une rotation

Exercice2(7.5 points)

Dans le plan oriente on considère le triangle isocèle $\mathbf{ABC}$ tel que $AB = AC$ et $\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$ .Soit I le point tel que le triangle $\mathbf{CAI}$ soit rectangle isocèle et $\left(\overline{CA}, \overline{CI}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

1) Soit r_A la rotation de centre $\mathbf{A}$ qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

   On pose $f = r_C\, o\, r_A$

   a) Justifier que f est une rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

   b) Justifier que $f(A) = I$ et $f(B) = C$

   c) Soit J et K les milieux respectifs de [BC] et [AI] la droite (AJ) coupe la droite (CK) en $\mathbf{O}$.
   Montrer que $\mathbf{O}$ est le centre de f

   d) Montrer que le quadrilatère $\mathbf{CABO}$ est un losange

2) Soit $\mathbf{S}$ la similitude directe de centre $\mathbf{O}$ qui transforme $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$

   a) Justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

   b) Montrer que $OA^2 = \left(OC + \frac{OC}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{OC^2}{2}$ puis déduire que le rapport de S est $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

   c) Soit $\mathbf{E}$ le milieu de $[OC]$ justifier que : $S(J) = E$

   d) Soient les points $\mathbf{A'}$ et $\mathbf{C'}$ définies par $A' = R_{\left(O,-\frac{\pi}{8}\right)}(A)$ et $C' = R_{\left(O,-\frac{\pi}{8}\right)}(C)$.

   la parallèle à $(A'C')$ passant par $\mathbf{C}$ coupe (OI) en $\mathbf{D}$ .Montrer que $S(C) = D$

3) Soit $\mathbf{g}$ la similitude indirecte de centre $\mathbf{O}$ d'axe (OC) et qui transforme $\mathbf{A}$ en $\mathbf{D}$.

   a) Montrer que $g(K) = E$

   b) On pose $g(B) = B'$ montrer que $(DB') \perp (DE)$ construire alors $\mathbf{B'}$

Exercice3(7.5 points)

I/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+x\ln(x)$

1) a) Etudier les variations de g

b)En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $1+x\ln(x)\geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x\ln(x)} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=+\infty$ .Interpréter graphiquement

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Interpréter graphiquement

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{1+\ln(x)}{(1+x\ln(x))^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) On a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C_1 et C_2 des fonctions définies $]0,+\infty[$

respectivement par $x\to\ln(x)$ et $x\to\dfrac{1}{x}$.

a) Construire le point A de C_1 d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ et le point B de C_2 d'abscisse $1-\dfrac{1}{e}$

puis déduire une construction du point C de C_f d'abscisse $\dfrac{1}{e}$

b) Déduire de la question 1)b) que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)\leq\dfrac{1}{x}$

Déterminer alors la position relative de C_f et C_2 .

c) Tracer C_f

5) Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

a) Montrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t+t\ln(t)}\leq f(t)$

b) Montrer alors que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\ln(1+\ln(x))\leq F(x)\leq\ln(x)$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$

6)Soit $n\in IN^*$

a)Montrer que la fonction $h:x\to x-F(x)$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$

b)En déduire que l'équation $h(x)=n$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_n=+\infty$

d) Vérifier que $\dfrac{\alpha_n}{n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$ .Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$.

Nom………………………. Préom……………………………

Annexe (Exercice3)