

Exercice1 (5 points)

ABC est un triangle équilatéral direct. I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [BA]. Répondre par vrai ou faux en justifiant

- 1) $T_{\overline{IA}} \circ S_{(BC)} = S_{(JK)}$
- 2) $T_{\overline{BI}} \circ h_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = h_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ tel que $\Omega = S_1(B)$
- 3) $R_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} \circ h_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}(C) = K$
- 4) $S_{(AI)} \circ h_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(BC)} = h_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$
- 5) $(KC) \cap (BJ) = \{O\}$, S est une similitude directe qui transforme le triangle IJK en ABC alors $S \circ h_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ est une rotation

Exercice2 (7.5 points)

Dans le plan orienté on considère le triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$. Soit I le point tel que le triangle CAI soit rectangle isocèle et $(\overline{CA}, \overline{CI}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

- 1) Soit r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

On pose $f = r_C \circ r_A$

- a) Justifier que f est une rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

- b) Justifier que $f(A) = I$ et $f(B) = C$

- c) Soit J et K les milieux respectifs de [BC] et [AI] la droite (AJ) coupe la droite (CK) en O. Montrer que O est le centre de f

- d) Montrer que le quadrilatère CABO est un losange

- 2) Soit S la similitude directe de centre O qui transforme A en C

- a) Justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

- b) Montrer que $OA^2 = \left(OC + \frac{OC}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{OC^2}{2}$ puis déduire que le rapport de S est $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$

- c) Soit E le milieu de [OC] justifier que : $S(J) = E$

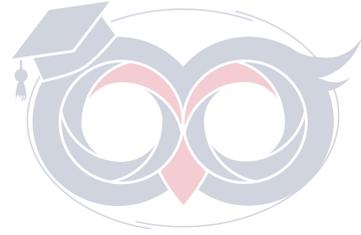
- d) Soient les points A' et C' définies par $A' = R_{\left(\frac{\pi}{8}\right)}(A)$ et $C' = R_{\left(\frac{\pi}{8}\right)}(C)$.

la parallèle à (A'C') passant par C coupe (OI) en D. Montrer que $S(C) = D$

- 3) Soit g la similitude indirecte de centre O d'axe (OC) et qui transforme A en D.

- a) Montrer que $g(K) = E$

- b) On pose $g(B) = B'$ montrer que $(DB') \perp (DE)$ construire alors B'



TuniTests



TuniTests

Exercice3(7.5 points)

I/ Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln(x)$

- 1) a) Etudier les variations de g
b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $1 + x \ln(x) \geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1 + \ln(x)}{(1 + x \ln(x))^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) On a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes C_1 et C_2 des fonctions définies $]0, +\infty[$

respectivement par $x \rightarrow \ln(x)$ et $x \rightarrow \frac{1}{x}$.

a) Construire le point A de C_1 d'abscisse $\frac{1}{e}$ et le point B de C_2 d'abscisse $1 - \frac{1}{e}$

puis déduire une construction du point C de C_1 d'abscisse $\frac{1}{e}$

b) Déduire de la question 1)b) que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$

Déterminer alors la position relative de C_1 et C_2 .

c) Tracer C_f

5) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

a) Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{t + t \ln(t)} \leq f(t)$

b) Montrer alors que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(1 + \ln(x)) \leq F(x) \leq \ln(x)$

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

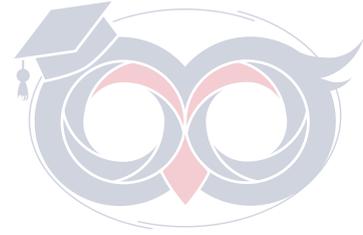
a) Montrer que la fonction $h : x \rightarrow x - F(x)$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$

b) En déduire que l'équation $h(x) = n$ admet dans $[1, +\infty[$ une seule solution α_n

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$

d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

Nom..... Prénom.....



TuniTests

Annexe (Exercice3)

