Exercice 1 *(6 points)*

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{i2\theta} = 0$; $\theta \in [0; 2\pi[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

2. Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On désigne par I, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $-1+i$; $e^{i\theta}$ et $ie^{i\theta}$.

a) Montrer que $OM_1 = OM_2$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles les points I, M_1 et M_2 soient alignés.

c) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}}\right) \equiv \theta + \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

d) En déduire les valeurs de θ de ; $[0; 2\pi[$. pour lesquelles la droite (M_1M_2) soit parallèle à $\left(O, \vec{v}\right)$.

3. Soit A le point d'affixe i et f l'application qui à tout point M d'affixe non nul z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i + \dfrac{1}{\bar{z}}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

a) Montrer que si M varie sur le cercle $\mathcal{C}$ alors le point M' varie sur un cercle $\mathcal{C}'$ de centre A dont on précisera le rayon.

b) Montrer que pour tout point $M \neq O$ on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv 0[2\pi]$.

c) On a représenté dans la page 3 (**à rendre avec la copie**), le cercle $\mathcal{C}$ et on a placé le point M_1 sur $\mathcal{C}$.

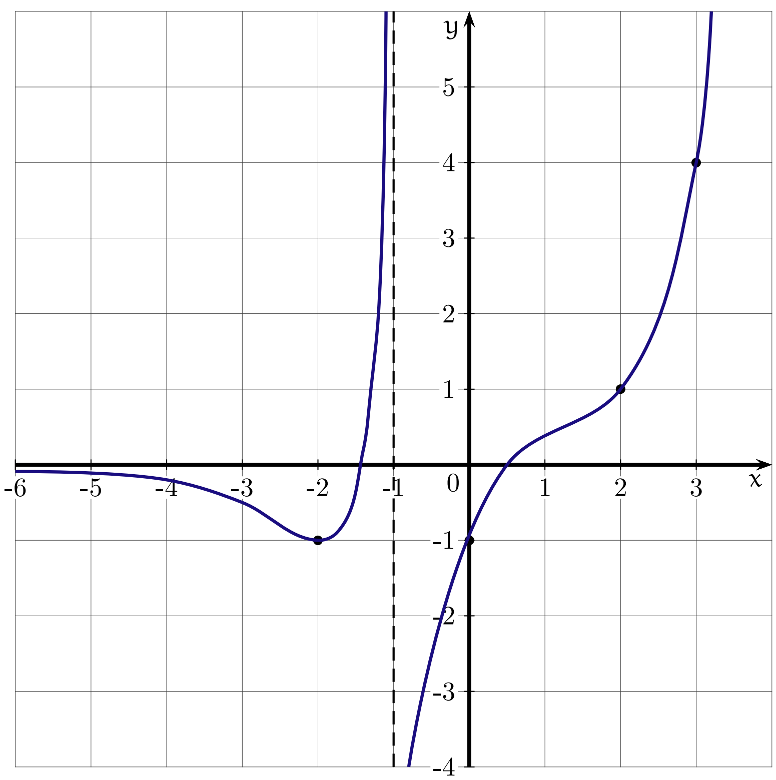
Construire M_2 puis les points M'_1 et M'_2 images respectives par f de M_1 et M_2.

Exercice 2 *(5 points)*

On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

✓ Les droites $\Delta : x = -1$ et $\Delta' : y = 0$ sont des asymptotes à $\mathcal{C}_g$.

✓ $\mathcal{C}_g$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{\jmath}\right)$.



I) Par lecture graphique :

1. Dresser le tableau de variations de g.

2. Déterminer $g\big(]-\infty;-2[\big)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$. et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{1-x}$.

II) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $h(x)=\dfrac{2x+1}{1-x}$ et $f=g\circ h$.

1. a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$

2. a) Étudier le sens de variation de h sur $I=]1,+\infty[$ et déterminer $h(I)$.

b) Déduire le sens de variation de f sur I.

c) Montrer que f est continue sur $I=]1,+\infty[$.

d) Déterminer $f(I)$.

Exercice 3 *(5 points)*

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1+u_n+\dfrac{2}{u_n} \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $u_n\geqslant 1$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. a) Établir que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $1\leqslant u_{n+1}-u_n\leqslant 3$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $n+1\leqslant u_n\leqslant 3n+1$.

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

4. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{u_k}=\frac{(-1)^0}{u_0}+\frac{(-1)^1}{u_1}+\cdots+\frac{(-1)^{2n}}{u_{2n}}$ et $w_n=v_n-\dfrac{1}{u_{2n+1}}$.

a) Vérifier que $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_{2n+2}}-\dfrac{1}{u_{2n+1}}$ et que $w_{n+1}-w_n=\dfrac{1}{u_{2n+2}}-\dfrac{1}{u_{2n+3}}$.

b) En déduire que la suite (v_n) est décroissante et que la suite (w_n) est croissante.

c) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

d) On pose $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Montrer que $\dfrac{3}{4}\leqslant\ell\leqslant 1$.

Exercice 4 *(4 points)*

Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse).Les réponses ne seront pas justifiées.

affirmation	vraie	fausse
a) Si $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ tel que : $z_B - z_A = -4i(z_C - z_A)$ alors les droites (AB) et (AC) sont parallèles.	☐ V	☐ F
b) Si $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $\|z\| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.	☐ V	☐ F
c) Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ alors la forme exponentielle de $1 + e^{i\theta}$ est $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.	☐ V	☐ F
d) Si $z = i + 2e^{i\theta}$ et $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ alors le point $M(z)$ varie sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(i)$ et de rayon 2.	☐ V	☐ F
e) Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes alors la suite (u_n) est convergente.	☐ V	☐ F
f) Si (u_n) est croissante et majorée par 3 alors elle converge vers 3.	☐ V	☐ F
g) Si deux suites sont convergentes vers la même limites alors elles sont adjacentes.	☐ V	☐ F
h) $\lim_{x\to+\infty} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2x-1}\right) = +\infty$.	☐ V	☐ F

Annexe