Exercice N°1 | 4 POINTS | 10 mn

Répondre par vrai ou Faux en justifiant la réponse.

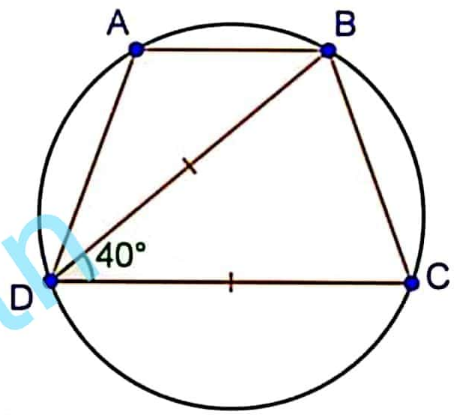
1°) 17^{2017} est un nombre premier.

2°) Les nombres $2^{30} \times 21^{25} \times 5^{3}$ et $11^{5} \times 3^{20}$ sont premiers entre -eux.

3°) Soit la figure ci-contre où ABCD est un trapèze inscrit dans un cercle tels que : $DB = DC$ et $C\hat{D}B = 40°$.

a) La mesure de l'angle $A\hat{B}D$ vaut 50°.

b) La mesure de l'angle $D\hat{A}C$ vaut 70°.



Exercice N°2 | 8 POINTS | 20 mn

Les question 1°), 2°), 3°) et 4°) sont indépendantes.

1°) Montrer que si n est un entier naturel <u>impair</u>, alors $\frac{n^2 - 1}{4} \in \mathbb{N}$.

2°) Soit $a \in \mathbb{N}$; $b \in \mathbb{N}^*$

Montrer que si a et 2a ont le même reste dans la division euclidienne par b alors b divise a.

3°) Déterminer tous les entiers naturels n pour que $\frac{2n + 27}{n + 3}$ soit un entier naturel.

4°) On donne : $a = 264$; $b = 540$.

a) Calculer PGCD (a,b) ; en déduire le PPCM (a,b).

b) Rendre irréductible la fraction $\frac{a}{b}$.

Exercice N°3 **8 POINTS** **25 mn**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O.

B,C et D trois points situés sur $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{BDC} = 67,5°$.

La parallèle à la droite (OB) passant par C recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en A.

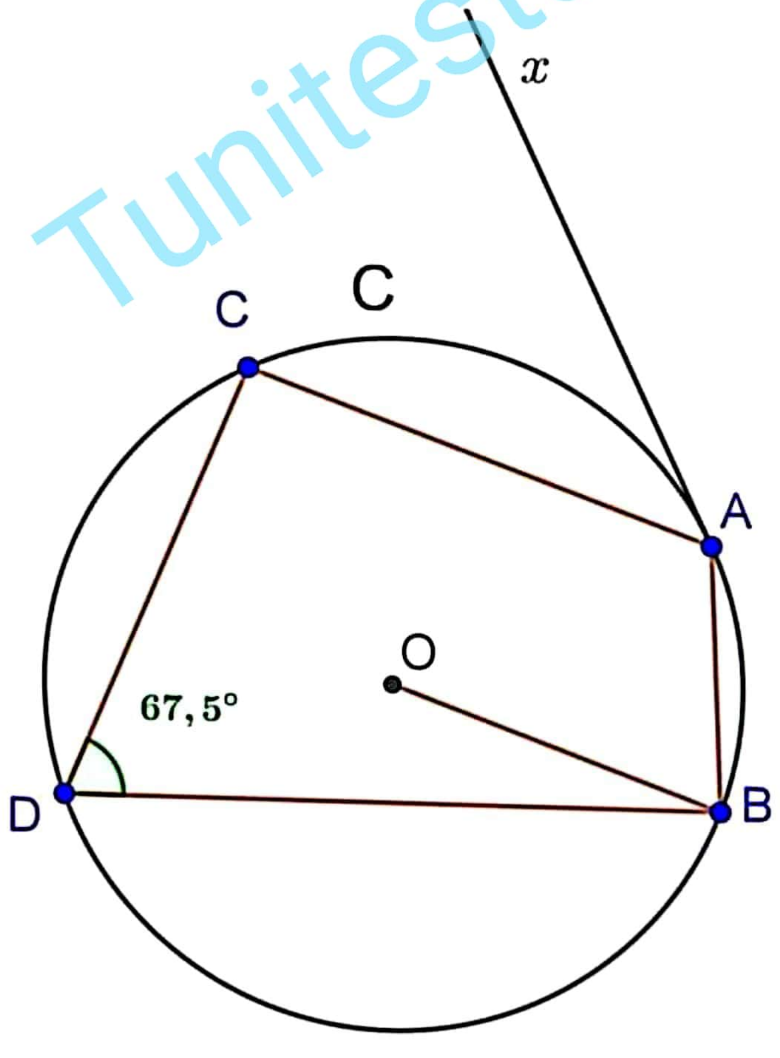
1°) a) Calculer $\widehat{BOC}$ puis $\widehat{OCB}$.

b) En déduire que $\widehat{BAC} = 112,5°$.

2°) Calculer $\widehat{ACB}$ puis $\widehat{ABC}$.

3°) La droite (Ax) est tangente à $\mathcal{C}$ en A

Montrer que (Ax) et (OC) sont parallèles.



Exercice N° 1 :

Répondre par vrai ou Faux en justifiant la réponse.

1°) 17^{2017} est un nombre premier.

FAUX

Car $D_{17^{2017}} = \{17^0, 17^1, 17^2, \dots, 17^{2017}\}$

2°) Les nombres $2^{30} \times 21^{25} \times 5^3$ et $11^5 \times 3^{20}$ sont premiers entre -eux.

FAUX

$A = 2^{30} \times 21^{25} \times 5^3 \quad ; \quad B = 11^5 \times \boxed{3^{20}}$

$= 2^{30} \times (7 \times 3)^{25} \times 5^3$

$= 2^{30} \times 7^{25} \times \boxed{3^{25}} \times 5^3$

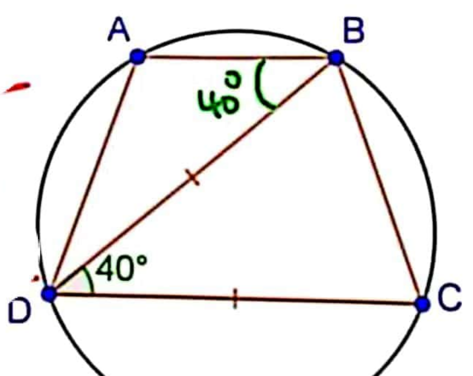
$\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n.}$

$PGCD(A, B) = 3^{20} \neq 1$

3°) Soit la figure ci-contre où $ABCD$ est un trapèze inscrit dans un cercle tels que : $DB = DC$ et $\widehat{CDB} = 40°$.

a) La mesure de l'angle $\widehat{ABD}$ vaut 50°.

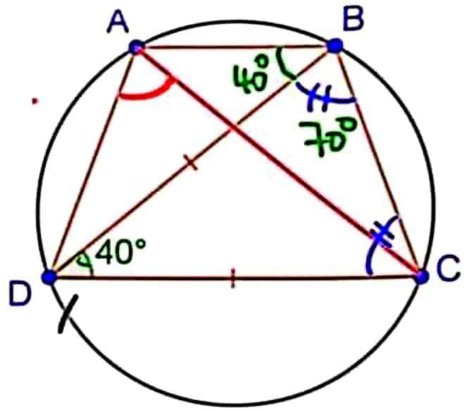
FAUX



$\boxed{\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = 40°}$

(2 angles alternes-internes formés par les 2 droite parallèle (AB) et (DC) et la secante (DB))

b) La mesure de l'angle $\widehat{DAC}$ vaut 70°. **VRAI**



On a $DB = DC$

Donc DBC est un triangle isocèle en D

Donc $\widehat{DBC} = \dfrac{180 - 40}{2}$

$= \boxed{70°}$

$\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = \boxed{70°}$ (2 angles inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$ et interceptant le même arc $[\overset{\frown}{DC}]$)

Exercice N° 2 :

Les question **1°)**, **2°)** , **3°)** et **4°)** sont indépendantes.

1°) Montrer que si n est un entier naturel **impair**, alors $\frac{n^2-1}{4} \in IN$.

n est impair donc $\boxed{n = 2k+1}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$$\frac{n^2-1}{4} = \frac{(2k+1)^2 - 1}{4}$$

$$= \frac{(2k)^2 + 2\times 2k \times 1 + 1^2 - 1}{4}$$

$$= \frac{4k^2+4k}{4} = \frac{\cancel{4}(k^2+k)}{\cancel{4}} = (k^2+k) \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\text{Ainsi si } n \text{ est impair alors } \frac{n^2-1}{4} \in \mathbb{N}}$

2°) Soit $a \in IN$; $b \in IN^*$

Montrer que si a et $2a$ ont le même reste dans la division euclidienne par b alors b divise a.

$a = b \times q_1 + r$ avec $q_1 \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < b$.

$2a = b \times q_2 + r$ avec $q_2 \in \mathbb{N}$ et $q_2 \geq q_1$

d'où $2a - a = (b \times q_2 + r) - (b \times q_1 + r)$

donc $a = bq_2 - bq_1$

d'où $a = b(q_2 - q_1)$

$a = b \times q_3$ avec $q_3 \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Ainsi } b \text{ divise } a.}$

3°) Déterminer tous les entiers naturels n pour que $\frac{2n+27}{n+3}$ soit un entier naturel.

$$\frac{2n+27}{n+3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2n+6+21}{n+3} \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(n+3)+21}{n+3} \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2(n+3)}{n+3} + \frac{21}{n+3}\right) \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \left(2 + \frac{21}{n+3}\right) \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{n+3} \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (n+3) \in D_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$$

$\Leftrightarrow$ $n+3=1$ ou $n+3=3$ ou $n+3=7$ ou $n+3=21$

$n=-2$ (imp) ou $\boxed{n=0}$ ou $\boxed{n=4}$ ou $\boxed{n=18}$

$$\boxed{\text{Donc } \frac{2n+27}{n+3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n=0 \text{ ou } n=4 \text{ ou } n=18}$$

0,5

4°) On donne : $a=264$; $b=540$.

a) Calculer $PGCD(a,b)$; en déduire le $PPCM(a,b)$

$$540 = 264 \times 2 + 12 \qquad 264 = 12 \times 22 + 0$$

$$\boxed{PGCD(a,b) = 12}$$

AUTREMENT

$$264 = 2^3 \times \boxed{3} \times 11 \quad \text{et} \quad 540 = \boxed{2^2} \times 3^3 \times 5$$

$$PGCD(a,b) = 3 \times 2^2$$

$$\boxed{\text{Donc } PGCD(a,b) = 12}$$

On a : $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$.

$$\Leftrightarrow \quad 12 \times PPCM(a,b) = 264 \times 540$$

$$\Leftrightarrow \quad PPCM(a,b) = \frac{264 \times 540}{12}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } PPCM(a,b) = 11\,880}$$

b) Rendre irréductible la fraction $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{264 : PGCD(a,b)}{540 : PGCD(a,b)} = \frac{264 : 12}{540 : 12} = \boxed{\frac{22}{45}}$$

Autrement

$$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{2^3}^{\,2} \times \cancel{3} \times 11}{\cancel{2^2} \times \cancel{3^3}^{\,3^2} \times 5} = \boxed{\frac{22}{45}}$$

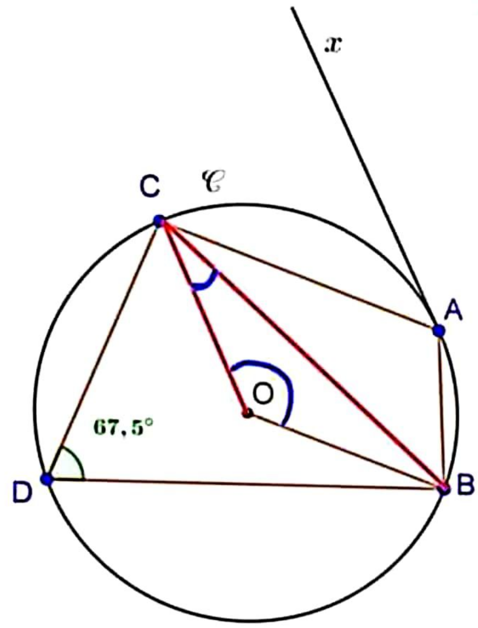
Exercice N° 3 :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O.

B,C et D trois points situés sur $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{BDC} = 67{,}5°$.

La parallèle à la droite (OB) passant par C recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en A.

1°) a) Calculer $\widehat{BOC}$ puis $\widehat{OCB}$.



$\widehat{BOC} = 2\ \widehat{CDB}$

(1)

($\widehat{BOC}$ angle au centre associé à $\widehat{BDC}$)

$\widehat{BOC} = 2 \times 67{,}5$

$\boxed{\text{Ainsi } \widehat{BOC} = 135°}$

📌 $OC = OB$ (rayons du $\mathcal{C}$) Donc OCB est isocèle en O.

d'où $\widehat{OCB} = \dfrac{180 - \widehat{COB}}{2}$

$= \dfrac{180 - 135}{2}$

$\boxed{\text{Ainsi } \widehat{OCB} = 22{,}5°}$

b) En déduire que $\widehat{BAC} = 112{,}5°$.

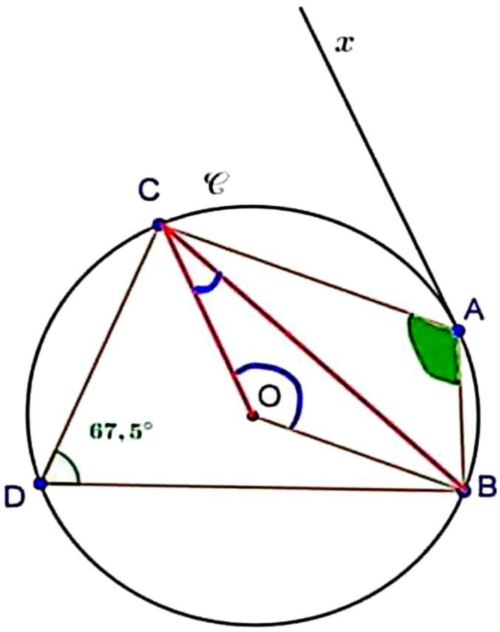
A, B et C trois points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et $\widehat{BAC}$ est un angle obtus

alors $\widehat{BAC} = 180 - \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$

$= 180 - \dfrac{135}{2}$

$= 180 - 67{,}5$

$\boxed{\text{Ainsi } \widehat{BAC} = 112{,}5°}$

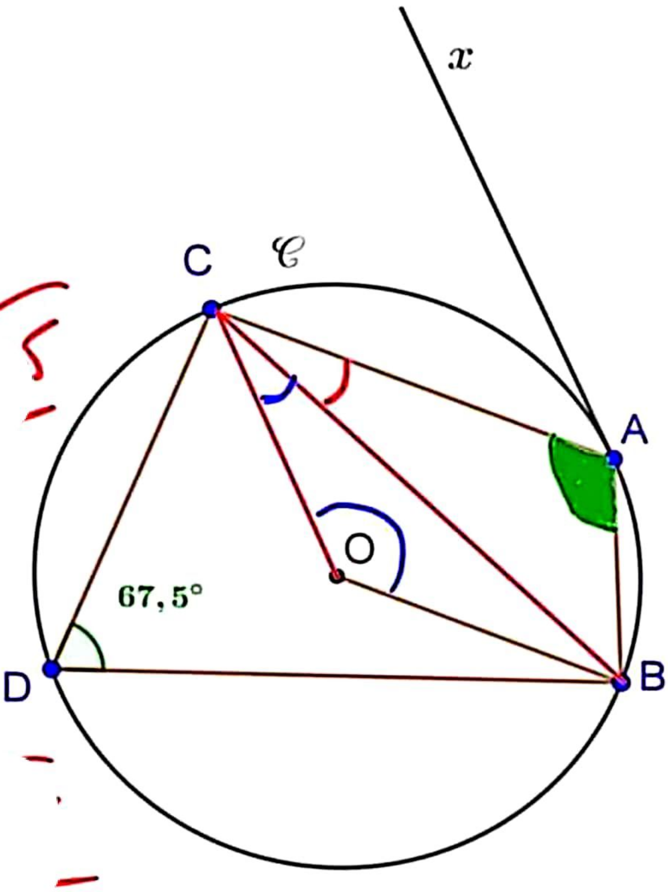


2°) Calculer $A\hat{C}B$ puis $A\hat{B}C$.

$A\hat{C}B = O\hat{B}C$ (2 angles alternes internes formés par les deux droites parallèle (AC) et (OB) et la sécante (BC))

or $\boxed{O\hat{B}C = O\hat{C}B = 22{,}5°}$

$\boxed{\text{Ainsi } A\hat{C}B = 22{,}5°}$



Dans le triangle ABC, on a

$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180$

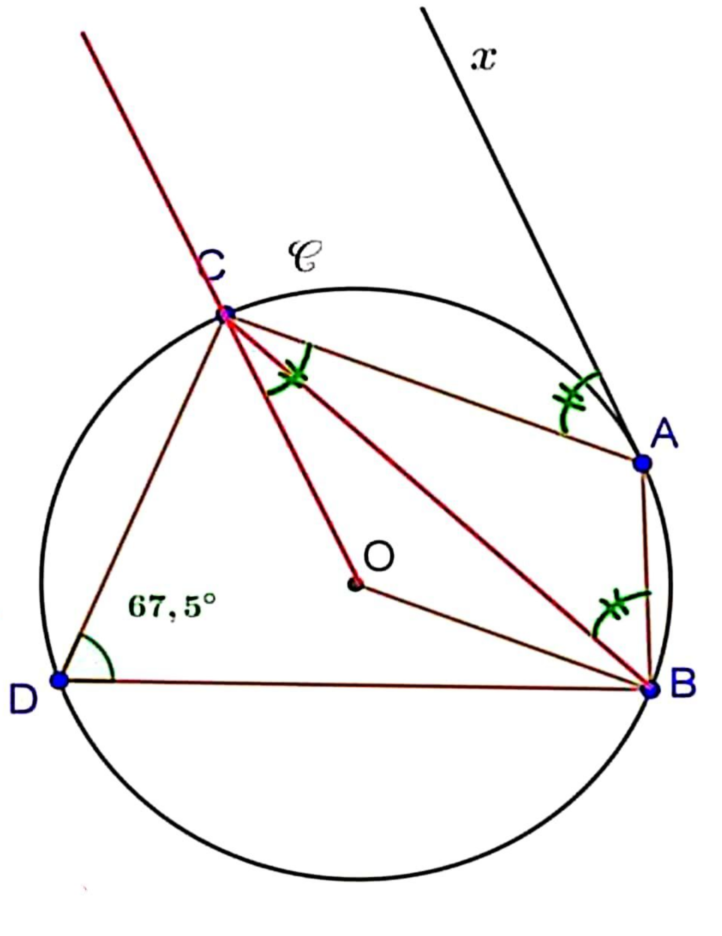
$$\Leftrightarrow 112,5 + \hat{ABC} + 22,5 = 180$$

$$\Leftrightarrow \hat{ABC} = 180 - (112,5 + 22,5)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \hat{ABC} = 45°}$$

3°) La droite (Ax) est tangente à $\mathscr{C}$ en A

Montrer que (Ax) et (OC) sont parallèles.



$x\hat{A}C = A\hat{B}C$ (2 angles inscrits dans $\mathscr{C}$ qui interceptent l'arc $[\widehat{AC}]$)

$$\boxed{\text{Donc } x\hat{A}C = 45°}$$

et $A\hat{C}O = A\hat{C}B + B\hat{C}O$

$= 22,5 + 22,5$

$= 45°$

Ainsi $\boxed{x\hat{A}C = A\hat{C}O}$ et $A\hat{C}O$ et $x\hat{A}C$ sont deux angles alternes-internes formés par les deux droites (Ax) et (OC) et la sécante (AC)

$$\boxed{\text{Donc } (Ax) \parallel (OC)}$$