الجمهورية التونسية
وزارة التربية

الجمعية التونسية لمسابقات وثقافة الرياضيات

3ème Test National En Olympiades Mathématiques

Date : Le 21-10-2022 * **Classes :** 1ère S, 2ème SC. et 3ème Maths * **Durée :** 2h.

Solution

Solution du Problème 1 :

$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}.|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}.(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}.$

$\frac{xy}{z}.\frac{yz}{x} = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.(2+\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2}).(2+\sqrt{2}) = 4-2 = 2$ .Donc $y^2 = 2$.

$\frac{xy}{z}.\frac{zx}{y} = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.3 = 3(2-\sqrt{2})$. Donc $x^2 = 3(2-\sqrt{2})$.

$\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y} = (2+\sqrt{2}).3 = 3(2+\sqrt{2})$. Donc $z^2 = 3(2+\sqrt{2})$.

Alors $S = x^2+y^2+z^2 = 3(2-\sqrt{2})+2+3(2+\sqrt{2}) = 6-3\sqrt{2}+2+6+3\sqrt{2} = 14$.

Solution du problème 2 :

Le plus petit nombre « spécial ».

Il faut minimiser a, b et c. Donc $a = b = c = 1$.

$a\times c + b\times d$ est un carré parfait. Donc $1\times 1 + 1\times d$ est un carré parfait.

Donc $1+d$ est un carré parfait.

Il suffit de prendre $d = 3$ pour avoir $a\times c + b\times d = 4 = 2^2$.

Donc le plus petit nombre « spécial » est 1113.

Le plus grand nombre « spécial ».

Il faut maximiser a, b et c. Donc $a = b = c = 9$.

$a\times c + b\times d$ est un carré parfait. Donc $9\times 9 + 9\times d$ est un carré parfait.

Donc $81 + 9b$ est un carré parfait

Il suffit de prendre $b = 7$ pour avoir $a\times c + b\times d = 144 = 12^2$.

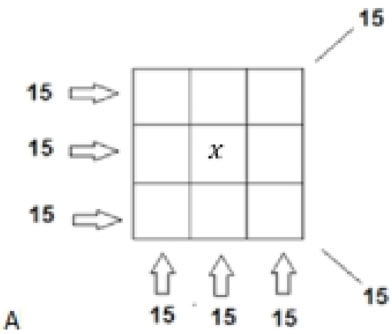
Donc le plus petit nombre « spécial » est 9997.

Solution du problème 3 :

Somme des chiffres dans la grille est $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Alors la somme des trois nombres sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est 45 :3=15.

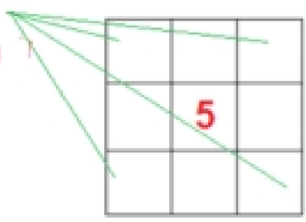
Ligne du milieu + Colonne du milieu + Les deux diagonales $= \underbrace{(1+2+3+\cdots+8+9)}_{45} + 3x = 4\times 15$.

Donc $x = 5$.



A ns et

9 ne peut pas etre dans les coins car forcemet sera alignés avec 6 ou 7ou 8 et la somme va dépasser15



9	5	1

	9	
	5	
	1	

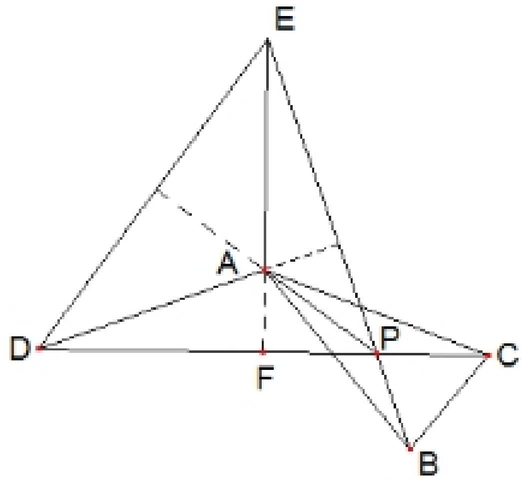
1	5	9

	1	
	5	
	9	

4		
9	5	1
		6

		6
9	5	1
4		

Donc le nombre de possibilités est $4 \times 2 = 8$.



Solution du problème 4 :

Soit $\{F\} = (AE) \cap (CD)$ et $\widehat{BAC} = 3a$.

Alors $\widehat{DAC} = \widehat{BAE} = 120° + \frac{2}{3}\widehat{BAC} = 120° + 2a$.

$\widehat{CAF} = \widehat{CAB} + \widehat{BAF} = 3a + 180° - \widehat{BAE}$

$= 3a + 180° - (120° + 2a) = 60° + a = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$.

Donc $(AF) \perp (CD)$ car ADC est isocèle en A.

D'où $(AE) \perp (CD)$.

De même on montre que $(DA) \perp (BE)$.

Alors A est l'orthocentre du triangle PDE.

D'où $(PA) \perp (ED)$.

Solution du problème 5 :

On constate déjà que $n \leq 7$, car on ne peut pas utiliser les chiffres plus grands que 7 et on doit utiliser n chiffres des unités (par exemple) différents. La somme de $3n$ chiffres utilisés doit être égale à $9n$.

Or la somme des chiffres des unités, par exemple, vaut au moins $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

D'où l'inéquation vérifié par n : $9n \geq \frac{3n(n+1)}{2}$ équivaut à $n \leq 5$.

Si c'est possible avec 5 nombres, alors seuls les chiffres 1,2,3,4,5 sont utilisés.

On arrive, par exemple, aux 5 nombres **135**, **252**, **324**, **441**, **513**.

Ce qui permet d'affirmer que $n = 5$ est bien le maximum(atteint).