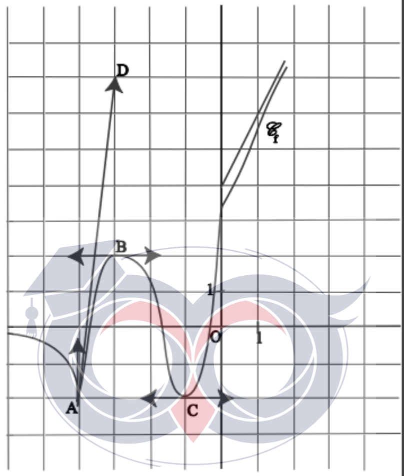
Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°19** (Nombre dérivé)	3ème Math Mr Jellali

Exercice 1

Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



1) Déterminer $f'(-1)$ et $f'(-3)$.

2)a) Déterminer $f'_d(-4)$.

b) f est elle dérivable à gauche en (-4) ?

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to(-4)^-}\left(\dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}\right)$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2 f(x)$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}\right)=4$.

b)Donner alors une équation de la tangente à (C_g) au point d'abscisse (-1).

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^2+2x$.

C_g est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1\. a. Montrer que g est dérivable en tout réel a et que $g'(a)=-2a+2$.

b. Donner une équation de la tangente T à C_g au point d'abscisse a.

2\. Soit a un réel de l'intervalle $]1,2]$, D la droite d'équation $y=1$ et A le point de coordonnées $(0,1)$.

La Tangente T à C_g au point d'abscisse a coupe la droite D en un point B et l'axe des abscisses en un point C

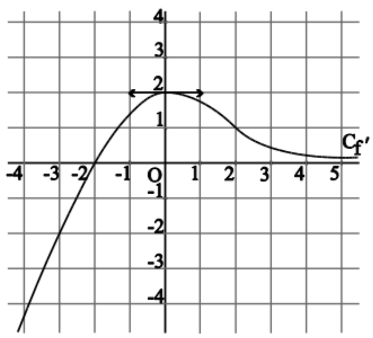
a. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(a)$ du trapèze OABC est égale à $\dfrac{2a^2-1}{4(a-1)}$.

b. Montrer que $\mathcal{A}(a)$ est minimale pour $a=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-3)=2$.

Le graphique ci-contre représente la courbe représentative **de sa fonction dérivée f'** dans un repère orthonormé.



On désigne par C_f la courbe représentative de la fonction f.

1) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse -3.

2) Donner une approximation affine de $f(-2{,}999)$.

3) La tangente à C_f au point d'abscisse 0 est-elle horizontale ?

Série N°19

Exercice 1 :

1) $f'(-1)=0$

$f'(-3)=0$

2) a) $f'_d(-4) = \dfrac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \dfrac{-2-7}{-4+3} = \boxed{9}$

b) $\mathcal{C}_f$ n'est pas dérivable à gauche en (-4); $\mathcal{C}_f$ admet à gauche au point d'abscisse (-4) une demi-tg verticale.

c) $\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4} = \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)} = -\infty$

3) $g(x) = x^2 f(x)$; $x \in \mathbb{R}$.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 f(x) - f(-1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^2 f(x) - f(x)) + (f(x) - f(-1))}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \left(f(x)\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right) + \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \right)$

$= \lim\limits_{x \to -1} \left(f(x)(x-1) + \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \right)$

$= \underbrace{f(-1)}_{-2}(-2) + \underbrace{f'(-1)}_{0}$

$= 4$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = 4$

donc g est dérivable en (-1) et $g'(-1)=4$

$T : y = g'(-1)(x+1) + g(-1)$

$y = 4x+2$

Exercice 2 : $g(x) = -x^2 + 2x$.

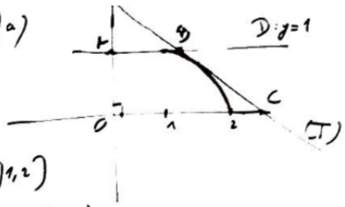
1) a) g est une fonction polynôme donc g est dérivable en tout réel a et $g'(a) = -2a+2$.

b) $T : y = g'(a)(x-a) + g(a)$

$y = (-2a+2)(x-a) - a^2 + 2a$

$\boxed{y = (-2a+2)x + a^2}$

2) a)



$a \in]1,2]$

$A(0,1)$.

$\{B\} = T \cap D$ équivaut $\begin{cases} y=1 \\ y=(-2a+2)x+a^2 \end{cases}$

équivaut $\begin{cases} y=1 \\ x=\dfrac{a^2-1}{2(a-1)} \text{ car } 2a-2 \neq 0 \end{cases}$

$= \dfrac{a+1}{2}$

donc $\boxed{B\left(\dfrac{a+1}{2}, 1\right)}$

$\{C\} = T \cap (O,\vec{i})$ équivaut $\begin{cases} y=0 \\ y=(-2a+2)x+a^2 \end{cases}$

équivaut $\begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{a^2}{2a-2} \end{cases}$ car $2a-2 \neq 0$

donc $C\left(\dfrac{a^2}{2a-2}, 0\right)$

$A(a) = \left(\dfrac{AB+OC}{2}\right) OA$; $OA = 1$

$AB = \sqrt{\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2} = \dfrac{a+1}{2}$ car $\dfrac{a+1}{2} > 0$

$OC = \sqrt{\left(\dfrac{a^2}{2a-2}\right)^2} = \dfrac{a^2}{2(a-1)}$ car $\dfrac{a^2}{2(a-1)} > 0$

donc $A(a) = \dfrac{\dfrac{a+1}{2} + \dfrac{a^2}{2(a-1)}}{2} = \dfrac{(a+1)(a-1)+a^2}{4(a-1)}$

$= \dfrac{2a^2-1}{4(a-1)}$

b) $A\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1}{4\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}$

$= \dfrac{2\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)-1}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{3+2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$a \in]1,2]$

$A(a) - \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2a^2-1}{4(a-1)} - \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \dfrac{2a^2-1-(2+\sqrt{2})(2a-2)}{4(a-1)}$

$= \dfrac{2a^2-1-4a+4-2\sqrt{2}a+2\sqrt{2}}{4(a-1)}$

$= \dfrac{2a^2-(4+2\sqrt{2})a+3+2\sqrt{2}}{4(a-1)}$

$\Delta = (4+2\sqrt{2})^2 - 8(3+2\sqrt{2}) = 0$

donc $a = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{4} = 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc $A(a) - \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2\left(a-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}{4(a-1)} \geq 0$ car $a>1$

donc $A(a) \geq 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

de plus $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1,7 \in]1,2]$

$A\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc $A(a)$ minimale pour $a = 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ex.3.

1) $T : y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$

$f'(-3) = -2$

$f(-3) = 2$

$y = -2x-4$

2) $f(-2,999) = f(-3+(0,001))$

$\simeq (0,001) f'(-3) + f(-3)$

$\simeq 1,998$

3) $\mathcal{C}_f$ n'admet pas une tg horizontale au point d'abscisse 0 car $f'(0) = 2 \neq 0$.