| Mathématiques | Devoir de Contrôle N° 3 : | |
|---|---|---|
| 3ème Maths : M2<br>Date : le 02 / 05 / 2010 | Durée : 2heures<br>Coefficient : 4 | Enseignant : Ghadhab Lassad |

## Exercice N°1 : 1,5 *points*

**Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit le nombre complexe : $z=2+i(6-6i)$

a) $|z|=10$  b) $\overline{z}=2-i(6-6i)$  c) $z\overline{z}=-100$.

2) L'image dans le plan complexe du nombre $z=(1+i)^{2010}$ appartient à :

a) l'axe des réels.  b) l'axe des imaginaires purs  c) la droite d'équation $y=x$ .

3) Soit le nombre complexe $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$ , on donne $Z=\left[4,\dfrac{\pi}{12}\right]$ et $z_1=\left[2,\dfrac{\pi}{3}\right]$ alors :

a) $z_2=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5\pi}{12}\right]$.  b) $z_2=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{4}\right]$  c) $z_2=\left[2,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

## Exercice N° 2: 3 *points*

Un sac contient 9 boules : 4 rouges numérotées : $-2$ ; 2 ; 2 ; 2 .
5 noires numérotées : $-2$ ; 0 ; 0 ; 0 ; 2 .

1) On tirer **simultanément <u>deux</u>** boules du sac.

On considère les évènements suivants :

$A$ : « les deux boules tirées sont de même couleur »

$B$ : « le produit de deux numéros obtenus est égal à 4 »

Calculer $card(A)$, $card(B)$ et $card(A\cup B)$

2) On tire maintenant **successivement et sans remise <u>trois</u>** boules du sac

On considère les évènements suivants :

$C$ : « la somme de trois numéros obtenus est égale à 0 »

$D$ : « une boule numérotée 0 apparaitre pour la première fois au $2^{\text{ème}}$ tirage »

Calculer $card(C)$ et $card(D)$

## Exercice N° 3: 6,5 *points*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application $f$ du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z' = (1+i)z + 2$.

1) Soit $A$ le point d'affixe $z_A = -2 + 2i$.
Déterminer les affixes des points $A'$ et $B$ vérifiant respectivement : $A' = f(A)$ et $f(B) = A$.
(on donnera les résultats sous forme algébrique).

2) $a$ – Montrer qu'il existe un unique point invariant $I$ par $f$ dont l'affixe est $2i$.

$b$ – Etablir que, pour tout nombre complexe $z$ distinct de $z_I$, $\dfrac{z'-z}{z_I - z} = -i$.

$c$ – Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{z'-z}{z_I - z}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MM'}}\right)[2\pi]$.

$d$ – Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{z'-z}{z_I - z}\right|$.

$e$ – Soit $M$ un point distinct de $I$.
Comparer $MM'$ et $MI$ et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MM'}\right)$

$f$ – Soit $E$ le point d'affixe $z_E = -\sqrt{3} - i$.

- Ecrire $z_E$ sous forme trigonométrique.
- Placer les points $A$, $B$, $I$, $A'$ et $E$ sur la même figure (page 4 annexe).
- Réaliser ensuite la construction du point $E'$ associé au point $E$.

3) $a$ – Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{M \in P / \ |z + 2 - 2i| = \sqrt{2}\}$.
Vérifier que $B$ est un point de $\Gamma$.

3) $a$ – Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{M \in P / \ |z + 2 - 2i| = \sqrt{2}\}$.
Vérifier que $B$ est un point de $\Gamma$.

$b$ – Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$ : $z' + 2 = (1+i)(z + 2 - 2i)$.

$c$ – En déduire que si $M$ est sur un cercle de centre $A$ et de rayon $\sqrt{2}$, $M'$ est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.



## Exercice N° 4: 5 *points*

**I –** On considère le système suivant $S : \begin{cases} a^2 + b^2 = 4625 \\ a \vee b = 440 \end{cases}$

1) Déterminer $D_{4625}$ et $D_{440}$.

2) Soit $d = a \wedge b$

$a$ – Montrer que $d = 1$ ou $d = 5$.

$b$ – Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, le système $S$.

**II –** Soit $n\in\mathbb{N}$ .

1) $a$ – Montrer par récurrence sur $n$, que $3^{2n}-1$ est divisible par 8 .

$b$ – En déduire que $3^{2n+1}-3$ est divisible par 8.

$c$ – Déterminer alors les restes de la division par 8 des nombres $3^{2n}$ et $3^{2n+1}$.

$d$ – Déterminer les restes de la division par 8 des nombres $3^{2011}$ et $5\times3^{2000}+2$ .

2) Le nombre $p$ étant un entier naturel, on considère le nombre $A_p$ défini par :

$$A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}+3^{4p}$$

$a$ – Si $p=2n$, quel est le reste de la division de $A_p$ par 8.

$b$ – Démontrer que, si $p=2n+1$, $A_p$ est divisible par 8.

## Exercice N° 5: 4 points

Soient les fonctions $f$ et $g$ définies par : $f(x)=2Cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$

et $g(x)=2Cos^2x+2\sqrt{3}Sinx.Cosx$

On désigne par $(C)$ et $(\Gamma)$ les courbes représentatives respectives de $f$ et $g$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation : $x=\frac{2\pi}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe $(C)$.

2) $a$ – Déduire que l'on peut étudier $f$ sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

$b$ – Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

$c$ – Construire la courbe $(C')$ de restriction de $f$ à l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$. (page 4 annexe)

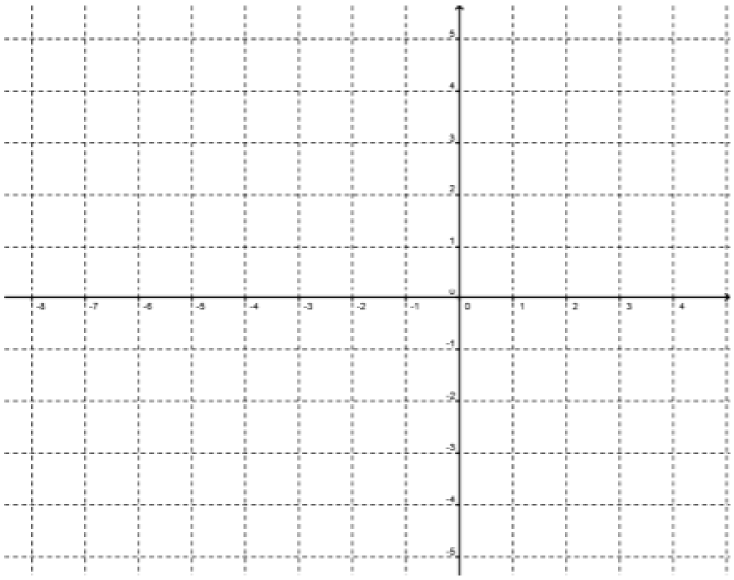
3) $a$ – Montrer qu'il existe un réel $k$ tel que pour tout réel $x$, $g(x)=f(x)+k$

$b$ – Construire, à partir de $(C')$, la courbe $(\Gamma')$ de la restriction de $g$ à l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

**Annexe**

Nom : ……………………………….. Prénom :……………………………………….

## Exercice N° 3:



## Exercice N° 5: