إصـلاح الاخـتـبـار التّـجـريـبـي عـدد 1

2020 -2021

إنجاز الأستاذ: صابر بنجدو

TuniTests

تمرين عدد 1

1)ب) 17

2)ج) $8-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

3)ب) 12

تمرين عدد 2

1)أ)

$$a=\sqrt{75}-\left(4+\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\left(4+\sqrt{147}\right)$$
$$=5\sqrt{3}-16-8\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 7\sqrt{3}$$
$$=-19+\sqrt{3}+21$$
$$=2+\sqrt{3}$$
$$a^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$$

ب)

$$b=6+\left(4-\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2$$
$$=6+\left(4-\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\right)^2$$
$$=6+\left(4-\left|2+\sqrt{3}\right|\right)^2$$
$$=6+\left(4-2-\sqrt{3}\right)^2$$
$$=6+\left(2-\sqrt{3}\right)^2$$
$$=6+4-4\sqrt{3}+3$$
$$=13-4\sqrt{3}$$

ج)

$$a-b=2+\sqrt{3}-13+4\sqrt{3}=5\sqrt{3}-11$$

$11^2=121$ و $\left(5\sqrt{3}\right)^2=75$

بما أنّ $5\sqrt{3}$ و 11 موجبان فإنّ $5\sqrt{3} < 11$ ومنه $a < b$

2) أ)
$$ab = (2+\sqrt{3})(13-4\sqrt{3}) = 26 - 8\sqrt{3} + 13\sqrt{3} - 12$$
$$= 14 + 5\sqrt{3}$$
$$= \frac{1}{2}(28 + 10\sqrt{3})$$
$$= \frac{1}{2}\left(25 + 2\times 5\sqrt{3} + \sqrt{3}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(5+\sqrt{3})^2$$

ب) لنا $(2+\sqrt{3})(13-4\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(5+\sqrt{3})^2$

بما أنّ $\frac{1}{2}(5+\sqrt{3})^2 > 0$ و $2+\sqrt{3} > 0$ فإنّ $13-4\sqrt{3} > 0$ ومنه $13 > 4\sqrt{3}$

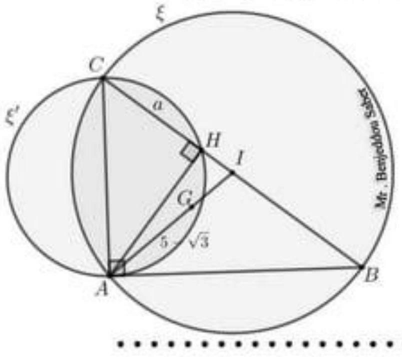
3) أ) بما أنّ النّقطة G هي مركز ثقل المثلّث ABC فإنّ $AI = \frac{3}{2}AG = \frac{3}{2}(5-\sqrt{3})$

الضّلع $[BC]$ للمثلّث ABC هو قطر للدّائرة ξ المحيطة به، إذن ABC قائم في A

بما أنّ ABC مثلّث قائم في A و I منتصف وتره فإنّ $BC = 2AI$

ومنه $BH = BC - CH = 2\times\frac{3}{2}(5-\sqrt{3}) - 2 - \sqrt{3} = 13 - 4\sqrt{3} = b$

ب) المثلّث ACH قائم في H لأنّ ضلعه $[AC]$ يمثّل قطرا للدّائرة ξ' المحيطة به.



ABC مثلّث قائم في A و $[AH]$ ارتفاعه الصّادر من A

إذن $AH^2 = HB \times HC = ab$

ومنه
$$AH = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|5+\sqrt{3}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(5+\sqrt{3})$$

تمرين عدد 3

1) أ) في حالة $x = \sqrt{7} - 1$ فإنّ $A = \left|(\sqrt{7}-1)^2 - 4\right| - 3$
$$= |7 - 2\sqrt{7} + 1 - 4| - 3$$

$= \left|4 - 2\sqrt{7}\right| - 3$

$= 2\sqrt{7} - 4 - 3$

$= 2\sqrt{7} - 7$

$4 - 2\sqrt{7} < 0$ لأنّ $4^2 = 16$ و $\left(2\sqrt{7}\right)^2 = 28$ و 4 و $2\sqrt{7}$ موجبان

ب) لنا $|A| = 9$ يعني $A = 9$ أو $A = -9$

يعني $|x^2 - 4| - 3 = 9$ أو $|x^2 - 4| - 3 = -9$

يعني $|x^2 - 4| = 12$ أو $|x^2 - 4| = -6$ (لا يمكن)

يعني $x^2 - 4 = 12$ أو $x^2 - 4 = -12$

يعني $x^2 = 16$ أو $x^2 = -8$ (لا يمكن)

يعني $x = 4$ أو $x = -4$

$S_{\mathbb{R}} = \{-4; 4\}$

2)أ) في حالة $x = \sqrt{7} - 1$ فإنّ $B = \left|\left(\sqrt{7} - 1\right)^2 + \sqrt{7} - 1 - 6\right| - 3$

$= \left|7 - 2\sqrt{7} + 1 + \sqrt{7} - 1 - 6\right| - 3$

$= \left|1 - \sqrt{7}\right| - 3$

$= \sqrt{7} - 1 - 3$

$= \sqrt{7} - 4$

ب) $(x-2)(x+3) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$

3)أ) $A - B = |x^2 - 4| - 3 - |x^2 + x - 6| + 3$

$= |(x-2)(x+2)| - |(x-2)(x+3)|$

$= |x-2||x+2| - |x-2||x+3|$

$= |x-2|(|x+2| - |x+3|)$

ب) لنا $A - B = 0$ يعني $|x-2|(|x+2| - |x+3|) = 0$

يعني $|x-2| = 0$ أو $|x+2| - |x+3| = 0$

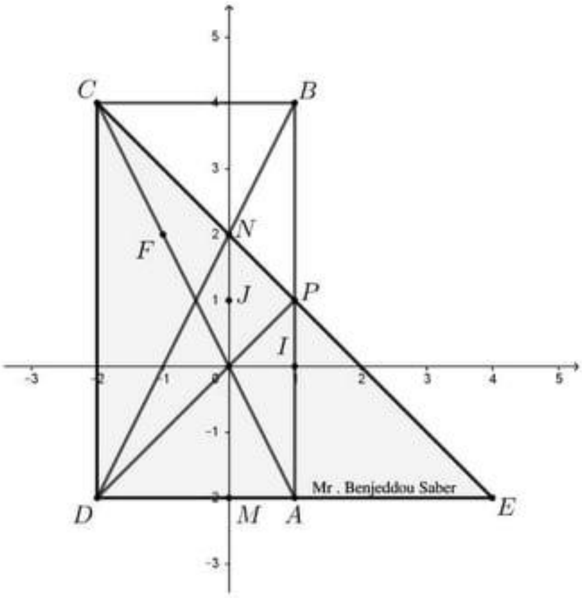
يعني $x - 2 = 0$ أو $|x+2| = |x+3|$

يعني $x = 2$ أو $x + 2 = x + 3$ أو $x + 2 = -x - 3$

يعني $x = 2$ أو $2 = 3$ (لا يمكن) أو $x = -\frac{5}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{2, -\frac{5}{2}\right\}$

تمرين عدد 4



1) أ) لنا $x_A = x_B$ و $x_C = x_D$ إذن $(AB)//(OJ)$ و $(CD)//(OJ)$

لنا $y_A = y_D$ و $y_B = y_C$ إذن $(AD)//(OI)$ و $(BC)//(OI)$

وبما أنّ $(OJ) \perp (OI)$ فإنّ زوايا الرّباعي $ABCD$ قائمة

وبالتّالي فإنّ $ABCD$ مستطيل

ب) لنا $x_A = x_B$ إذن $AB = |y_B - y_A| \times OJ = |4 + 2| \times 1 = 6$

لنا $y_A = y_D$ إذن $AD = |x_D - x_A| \times OI = |-2 - 1| \times 1 = 3$

2) أ) لنا $M \in (OJ)$ إذن $x_M = 0$

و $M \in (AD)$ حيث $(AD)//(OI)$ إذن $y_M = y_A = -2$

ومنه $M(0, -2)$

ب) لنا $y_M = y_D$ إذن $DM = |x_M - x_D| \times OI = |0 + 2| \times 1 = 2$

في المثلّث ABD لنا $M \in (AD)$ و $N \in (BD)$ حيث $(MN)//(AB)$

إذن حسب مبرهنة طالس فإنّ $\frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DB} = \frac{MN}{AB}$

يعني $\frac{DM}{DA} = \frac{MN}{AB}$ يعني $\frac{2}{3} = \frac{MN}{6}$ يعني $MN = \frac{2\times6}{3} = 4$

لنا $MN = |y_N - y_M| \times OJ$ يعني $|y_N - y_M| = 4$

يعني $|y_N + 2| = 4$

يعني $y_N + 2 = 4$ أو $y_N + 2 = -4$

يعني $y_N = 2$ أو $y_N = -6$

وبما أنّ $y_N > 0$ فإنّ $y_N = 2$

ومنه $N(0,2)$ لأنّ $N \in (OJ)$

3) أ) لنا A و M و D هي مساقط B و N و D وفقا لنفس المنحى على المستقيم (AD)

إذن $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{ND}$ يعني $\frac{NB}{ND} = \frac{AD-DM}{2} = \frac{1}{2}$

ب) في المثلّث DEN لنا $C \in (EN)$ و $B \in (DN)$ حيث $(BC)//(DE)$

إذن حسب مبرهنة طالس فإنّ $\frac{NB}{ND} = \frac{NC}{NE} = \frac{BC}{DE}$

يعني $\frac{BC}{DE} = \frac{NB}{ND}$ يعني $\frac{BC}{DE} = \frac{1}{2}$ يعني $DE = 2BC = 2AD$

وبما أنّ النّقاط E و A و D على استقامة واحدة فإنّ A منتصف $[DE]$

4) أ) لنا F مناظرة A بالنّسبة إلى O إذن $x_F = -x_A = -1$ و $y_F = -y_A = 2$

ومنه $F(-1,2)$

لنا $x_F = -1 = \frac{0-2}{2} = \frac{x_O+x_C}{2}$ و $y_F = 2 = \frac{0+4}{2} = \frac{y_O+y_C}{2}$ إذن F منتصف $[OC]$

ب) لنا O منتصف $[AF]$ و F منتصف $[OC]$ إذن A و O و F و C على استقامة واحدة

و $CO = \frac{2}{3}AC$

$[CA]$ هو الموسّط الصّادر من C للمثلّث CDE و O نقطة من $[CA]$ حيث $CO = \frac{2}{3}AC$

إذن النّقطة O هي مركز ثقل المثلّث CDE

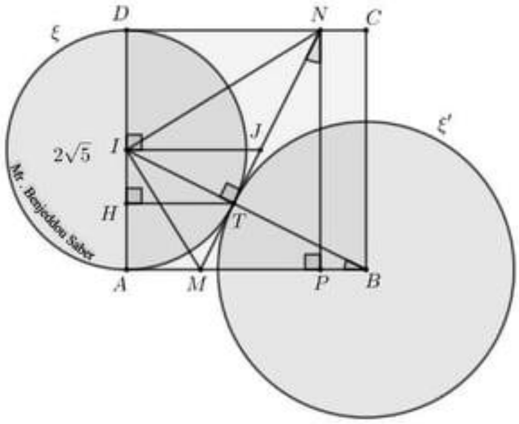
ج) في المثلّث DEC لنا A منتصف $[DE]$ و P نقطة من $[EC]$ حيث $(AP)//(DC)$

إذن P منتصف $[EC]$

$[DP]$ هو الموسّط الصّادر من D للمثلّث CDE و O هي مركز ثقله

إذن النّقاط P و O و D على استقامة واحدة

تمرين عدد 5



1)أ) لنا (MN) مماس لـ ξ في T إذن $(MN) \perp (TB)$

و (MN) مماس لـ ξ' في T إذن $(MN) \perp (TI)$

ومنه $(TB)//(TI)$ و T نقطة مشتركة بينهما

وبالتّالي فإنّ أنّ النّقاط B و T و I على استقامة واحدة

ب) ABI مثلّث قائم في A إذن حسب نظريّة بيتاغور فإنّ:

$$BI^2 = AB^2 + AI^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 25$$

إذن $BI = \sqrt{25} = 5$

$$BT = BI - IT = 5 - \sqrt{5}$$

2)أ) لنا $N\hat{C}B = C\hat{B}P = B\hat{P}N = 90°$ إذن CNP مستطيل

ب) في المثلّث MBT القائم في T لنا $A\hat{B}I = M\hat{B}T = 180° - \left(M\hat{T}B + T\hat{M}B\right)$

$$= 180° - 90° - T\hat{M}B$$

$$= 90° - T\hat{M}B$$

في المثلّث MPN القائم في P لنا $M\hat{N}P = 180° - \left(M\hat{P}N + N\hat{M}P\right)$

$= 180° - 90° - N\widehat{M}P$

$= 90° - T\widehat{M}B$

إذن $A\widehat{B}I = M\widehat{N}P$.

ج) في المثلّثين MNP و ABI لنا:

$I\widehat{A}B = M\widehat{P}N$ و $A\widehat{B}I = M\widehat{N}P$ و $AB = PN$

إذن حسب الحالة الأولى لتقايس المثلّثات العامّة فإنّ المثلّثين MNP و ABI متقايسان

وينتج عن ذلك تقايس بقيّة العناصر النّظيرة مثنى مثنى

ومنه $MN = NI = 5$

3)أ) في المثلّث ABI لنا $H \in (IA)$ و $T \in (IB)$ حيث $(AB)//(HT)$ (يعامدان (AI))

إذن حسب مبرهنة طالس فإنّ: $\frac{IH}{IA} = \frac{IT}{IB} = \frac{HT}{AB}$

يعني $\frac{IT}{IB} = \frac{HT}{AB}$ يعني $\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{HT}{2\sqrt{5}}$ يعني $TH = \frac{\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}{5} = 2$

ب) لنا $\frac{IH}{IA} = \frac{HT}{AB}$ يعني $\frac{IH}{\sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}}$ يعني $IH = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$

4)أ) لنا N و J و M هي مساقط D و I و A على التّوالي على (MN) وفقا لنفس المنحى

بما أنّ I منتصف $[AD]$ فإنّ J منتصف $[MN]$

ب) لنا J و T و M هي مساقط I و H و A على التّوالي على (MJ) وفقا لنفس المنحى

إذن $\frac{JT}{JM} = \frac{IH}{IA}$ يعني $\frac{JT}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ يعني $JT = \frac{\sqrt{5}}{2}$

المثلّث IJT قائم في T إذن حسب نظريّة بيتاغور فإنّ: $IJ^2 = JT^2 + IT^2$

$= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$

$= \frac{25}{4}$

إذن $IJ = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

ج) في المثلّث IMN لنا J منتصف $[MN]$ و $JI = JM = JN$

إذن المثلّث IMN قائم في I