الدّرس 3: العمليّات في مجموعة الأعداد الحقيقيّة

ملخّص الدّرس

❖ **عمليّة الجمع في $\mathbb{R}$ هي:**

• **عمليّة تبديليّة:**

مهما يكن العددان الحقيقيّان a و b فإنّ : $a+b=b+a$

مثال : $\sqrt{2}+\left(-2\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=-\sqrt{2}$

• **عمليّة تجميعيّة:**

مهما تكن الأعداد الحقيقيّة a و b و c فإنّ :

$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$

مثال: $-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+1=(-\sqrt{3}+2\sqrt{3})+1$

$=\sqrt{3}+1$ (تبقى كما هي لا يمكن اختصارها)

❖ **مجموع عددين متقابلين يساوي صفر:**

$(-3)+3=0$

مثال: $\left(-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}\right)=0$

إذا كان a و b عددان حقيقيّان حيث $a+b=0$ فإنّ العدد a مقابل b

كلّ عدد حقيقي a له مقابل نرمز له بـ $(-a)$

مثال:

✓ مقابل $\sqrt{2}-1$ هو $-\left(\sqrt{2}-1\right)=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$

✓ مقابل $\sqrt{3}+\pi$ هو $-\left(\sqrt{3}+\pi\right)=-\sqrt{3}-\pi$

ملاحظة:

a و b عددان حقيقيّان

مقابل $(a+b)$ هو $-a-b$

مقابل $(a-b)$ هو $b-a$

❖ لحساب عبارات عدديّة أو حرفيّة بها عمليّات جمع و طرح في مجموعة الأعداد الحقيقيّة نطبّق نفس الخاصيّات و التّقنيّات المعتمدة في مجموعة الأعداد الكسريّة.

مهما تكن الأعداد الحقيقيّة a و b و c فإنّ:

$a-b=a+(-b)$ ؛ $a-(b-c)=a-b+c$

$-(-a)=a$ ؛ $a-(b+c)=a-b-c$

$-(a-b)=-a+b$ ؛ $-(a+b)=-a-b=(-a)+(-b)$

Tunitests.tn

ملاحظة: عند تغيير ترتيب حدود يجب أن يحتفظ كلّ حدّ بالعلامة الّتي تسبقه.

❖ عملية الضرب في $\mathbb{R}$ هي:

• **عملية تبديليّة:** مهما يكن a و b عددان حقيقيّان فإن: $a \times b = b \times a$

مثال: $(-2) \times (3) = 3 \times (-2) = -6$

$$\left(\frac{-3}{2}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{3}{5}$$

- جذاء عددان حقيقيّان لهما نفس العلامة هو عدد موجب
- جذاء عددان حقيقيّان لهما علامتان مختلفتان هو عدد سالب

• **عمليّة تجميعيّة:**

مهما تكن الأعداد الحقيقيّة a و b و c فإنّ:

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

مثال:
$$2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (2 \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 2 \times \left(\sqrt{2} \times \sqrt{2}\right) = 4$$

$$\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2} \times \sqrt{2}\right) \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

(توظيف الخاصّيتين التبديليّة و التجميعيّة)

• **عمليّة توزيعيّة على الجمع و الطّرح.**

مهما تكن الأعداد الحقيقيّة a و b و c فإنّ:

عمليّة النّشر:

$$\overbrace{a \times (b + c)}^{\text{عمليّة التفكيك}} = \underbrace{ab + ac}_{\text{عمليّة النّشر}}$$

$$a \times (b - c) = ab - ac$$

مثال:
$$\frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{5}\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) = \sqrt{2} \times \left(\frac{5}{15} - \frac{6}{15}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{15}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3} \times (1 + 1 + 1) = 3\sqrt{3}$$

ملاحظة:

• نشر عبارة يعني حذف الأقواس.

مثال:
$$\sqrt{2} \times \left(-\sqrt{2} + 1\right) = -\sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 = -2 + \sqrt{2}$$

• تفكيك عبارة يعني البحث عن العامل المشترك ثمّ الكتابة في صيغة جذاء.

مثال:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{5}\sqrt{3} = \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \sqrt{3} \times \left(-\frac{5}{10} + \frac{10}{10} - \frac{2}{10}\right) = \sqrt{3} \times \frac{3}{10}$$

Tunitests.tn

• مقلوب عدد حقيقي a مخالف لصفر هو العدد الحقيقي $\frac{1}{a}$

مقلوب العدد $\sqrt{2}$ هو $\frac{1}{\sqrt{2}}$

مقلوب العدد $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هو $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

-إذا كان a وb عددان حقيقيّان مخالفان للصّفر حيث $a \times b = 1$ فإنّ العدد a هو مقلوب العدد b.

ملاحظة:

-إذا كان $a \times b \in \mathbb{R}_+$ فإنّ a وb لهما نفس العلامة

-إذا كان $a \times b \in \mathbb{R}_-$ فإنّ a وb لهما علامتان مختلفتان

-إذا كان $a + b = 0$ فإنّ a وb متقابلان

-إذا كان $a - b = 0$ فإنّ a وb متساويان

-إذا كان $a \times b = 1$ فإنّ a مقلوب b

-إذا كان $a \times b = 0$ فإنّ $a = 0$ أو $b = 0$

❖ القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

• القيمة المطلقة لعدد حقيقي موجب يساوي العدد نفسه

العدد نفسه = |عدد موجب|

• القيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب يساوي مقابل العدد

مقابله = |عدد سالب|

• مهما يكن العددان الحقيقيّان a و b فإنّ:

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

مثال: $|-2x| = |-2| \times |x| = 2 \cdot |x|$

• إذا كان a وb عددان حقيقيّان حيث b مخالف لصفر فإنّ : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

مثال: $\frac{|2\pi - 6|}{|3 - \pi|} = \left|\frac{2(\pi - 3)}{-(\pi - 3)}\right| = |-2| = 2$

❖ **قسمة عدد حقيقي على عدد حقيقي مخالف لصفر:**

مهما تكن الأعداد الحقيقيّة a و b وc وd حيث b وc وdمخالفة للصفر فإنّ : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

مثال:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

Tunitests.tn

حساب عبارات بها جذور تربيعية.

- مهما يكن العددان الحقيقيّان a و b الموجبان.

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ / $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ يعني $a=b$

مثال:

- $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=4$
- $\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$
- $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

- مهما يكن العددان الحقيقيّان الموجبان a و b حيث b مخالف لصفر : $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

مثال: $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}=\sqrt{\frac{18}{50}}=\sqrt{\frac{9\times2}{25\times2}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

- مهما يكن العدد الحقيقي x فإنّ: $\sqrt{x^2}=|x|$

مثال: • أوجد x حيث: $|2x+1|=3$ يعني $\sqrt{(2x+1)^2}=3$

يعني

$2x+1=3$ أو $2x+1=-3$

$2x=2$ | $2x=-4$

$x=1$ | $x=-2$

• أوجد x حيث $\sqrt{x}=2$

يعني $\sqrt{x}=\sqrt{4}$ يعني $x=4$

• أوجد x حيث $\sqrt{|x|+1}=2$

يعني: $\sqrt{|x|+1}=\sqrt{4}$

يعني : $|x|+1=4$ يعني $|x|=3$

إذن $x=-3$ أو $x=3$

مثال: لإختصار جذور تربيعيّة

- $\sqrt{8}+\sqrt{72}=\sqrt{2^2\times2}+\sqrt{2^2\times2\times3^2}$

$=2\sqrt{2}+2\times3\sqrt{2}=2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

- $\sqrt{12}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{75}=\sqrt{2^2\times3}+\sqrt{2^2\times2}+\sqrt{3^2\times2}-\sqrt{5^2\times3}$

$=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{3}=5\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

- التناسب (تذكير) :

إذا كان a و b عددان حقيقيّان مناسبان طردًا مع c و d فإنّ : $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ يعني $ad=bc$ (جذاء الطّرفين يساوي جذاء الوسطين)

Tunitests.tn

تمارين للدّعم

تمرين عدد 1:

1) أوجد مقابل كل عدد من الأعداد التالية :

$\sqrt{3}-1$; $1+\sqrt{2}$; $-\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\sqrt{2}$

2) نعتبر الأعداد الحقيقيّة التّالية

$a=1+\sqrt{2}$; $b=-\sqrt{2}-1$; $c=1-\sqrt{2}$; $d=\sqrt{2}-1$

أ- احسب $a+b$; $a+c$; $c+b$; $c+d$

ب- استنتج مقابل كلّ من العددين a و c

ج- دون القيام بالعمليّة بيّن أنّ: $(a+c)+(b+d)=0$

3) ليكن x و y عددان حقيقيّان أتمم :

مقابل $x-y$ هو .....

مقابل $x+y$ هو .....

تمرين عدد 2:

اختصر العبارات التّالية :

$A=-\pi-(\sqrt{2}-\pi)$

$B=-(\pi-3,14-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})$

$C=\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1$

$D=\left(\frac{-2}{7}-1\right)-\left(\sqrt{7}-\frac{2}{7}\right)$

$E=\left(\frac{-5}{3}+\sqrt{2}\right)-\left[\left(\sqrt{2}-\frac{5}{3}\right)-\sqrt{3}\right]-\left(\sqrt{3}+\frac{4}{7}\right)$

$F=-\left(5\sqrt{5}-3\right)-\left(-7\sqrt{5}+5\right)+\left(2\sqrt{5}+2\right)$

تمرين عدد 3:

نعتبر العبارتين a و b حيث x و y عددان حقيقيّان :

$a=(1-\sqrt{2})-\left[\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{2}\right]$

$b=(-x+\sqrt{3})-\left(y-x-\sqrt{5}\right)+\left[\left(y-\sqrt{5}\right)-2\right]$

بيّن أنّ a مقابل b

Tunitests.tn

تمرين عدد 4:

ليكن a و b عددان حقيقيّان حيث $b-a=-\sqrt{2}$

1) احسب b إذا علمت أنّ $a=-1+\sqrt{2}$

2) اختصر العبارة E بعد حذف الأقواس و المعقوفات

$$E=-\left(\sqrt{2}-b\right)-\left[b-\left(a-\frac{3}{2}\right)\right]-\left(b-\frac{1}{2}\right)+1$$

تمرين عدد 5:

لتكن العبارة F التالية حيث a و b عددان حقيقيان

$$F=-b+\left[\left(\sqrt{3}-a\right)-\sqrt{2}\right]-\left[-\left(\sqrt{2}+b\right)+(1-b)\right]$$

1) بيّن أنّ : $F=b-a+\sqrt{3}-1$

2) أ- احسب العبارة F علما أنّ : $a=\sqrt{2}-1$ و $b=\sqrt{2}$

ب-أحسب F إذا كان a و b متقابلان و $a=\sqrt{3}$

3) استنتج قيمة $a-b$ إذا كانت $F=\sqrt{3}$

تمرين عدد 6:

نعتبر العبارة X التّالية حيث a و b عددان حقيقيّان :

$$X=(a-1)-\left[\left(1-\sqrt{5}\right)\right]-\left[-(2-b)\right]$$

1) بيّن أنّ : $X=a-b+\sqrt{5}$

2) احسب X إذا علمت أنّ: $b-a=-\sqrt{5}$

3) أوجد العدد الحقيقي a إذا كان X و (1-b) متقابلان.

تمرين عدد 7:

احسب الجذاءات التالية:

$$*\ 2\sqrt{2}\times\left(\frac{3}{2}\times\sqrt{2}\right)$$

$$*\left(\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\right)\times\left(-3\sqrt{3}\right)$$

$$*\pi\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{-1}{3\pi}\right)\times 15$$

$$*\left(-5\times\sqrt{2}\right)\times\frac{2}{5}\times\sqrt{2}$$

$$*\frac{-3}{2}\times\sqrt{2}\times\left[\frac{2}{15}\times\left(-2\sqrt{2}\right)\right]$$

مرين عدد 8:

) انشر ثمّ اختصر العبارات التّالية:

- $a=-2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)$
- $b=5\left(\sqrt{2}+1\right)-2\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}+1\right)$
- $c=\left(\sqrt{2}-1\right)\times\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$
- $d=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}-1\right)\times\left(\sqrt{3}+1\right)$
- $e=2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)-3\sqrt{5}$

2) بيّن أنّ x مقلوب y في الحالات التّالية:

أ) $x=\sqrt{2}-1$ و $y=\sqrt{2}+1$

ب) $y=\frac{1}{2}\times\left(2+\sqrt{2}\right)$ و $x=(-\sqrt{2}+2)$

ج) $x=-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$ و $y=1+\sqrt{3}$

د) $x=(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}$ و $y=(4-\sqrt{2})-\left(1-3\sqrt{2}\right)$

تمرين عدد 9:

ليكن العددان الحقيقيان: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $b=\sqrt{2}$

1) بيّن أنّ a مقلوب b.

2) أ) أختصر العبارتين x و y

$y=-(a+b)\times b+\sqrt{2}$ $\qquad$ $4+a\sqrt{2}-a\left(\sqrt{2}+2\right)\times b$

ب) بيّن أنّ x مقابل y

تمرين عدد 10:

لتكن العبارة I التّالية:

$$I=\sqrt{2}-\left[\sqrt{3}-\left(\sqrt{5}-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\right]+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$$

1) بيّن أنّ : $I=-2+\sqrt{2}$

2) أ) احسب $I\times\left(\sqrt{2}+2\right)$

ب) بيّن أنّ: $I\in\mathbb{R}_-$

ج) احسب $|I|$

3) ليكن x عدد حقيقي حيث I و $\left(x+\sqrt{2}\right)$ متقابلان

أوجد العدد الحقيقي x .

تمرين عدد 11:

1) أتمم الفراغات بـ $\mathbb{R}_-$ أو $\mathbb{R}_+$ (حيث $a \in \mathbb{R}_-$) :

• $3 - a \in$	• $3,14 - \pi \in$ .....
• $-1,4 + \sqrt{2} \in$	• $-1 + \sqrt{2} \in$ .....
• $\frac{22}{7} - \pi \in$	• $\sqrt{2} - \sqrt{3} \in$ .....
• $-\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \in$	• $-\sqrt{2} + a \in$ .....
• $\frac{-a}{\sqrt{2}-1} \in$	• $\frac{a}{1-\sqrt{3}} \in$ .....

2) اختصر ما يلي:

$$A = |1-\sqrt{2}| + (1-\sqrt{2})$$

$$B = -|3-\sqrt{3}| - |3-\pi|$$

$$C = (-1+\sqrt{2}) - |\sqrt{2}-\sqrt{3}| - |-1+3|$$

$$D = \left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right| - \frac{1}{|\sqrt{2}+1|}$$

$$E = \left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

Tunitests.tn

تمرين عدد 12:

اختصر العبارات التالية

$a = -3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$

$b = \sqrt{20} - \sqrt{45} + 5\sqrt{5}$

$c = 2\sqrt{125} - 3\sqrt{75} + \sqrt{500}$

$d = \sqrt{125} - \sqrt{5}$

$e = -\sqrt{20} + 3\sqrt{3} \times \sqrt{15} - 6\sqrt{5}$

$f = -\sqrt{50} + \sqrt{32} + \sqrt{72}$

$g = -2\sqrt{18} + \sqrt{200} - \sqrt{8}$

$h = \sqrt{8} + \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{2}$

$i = -\sqrt{162} - \sqrt{12} + \sqrt{50} + \sqrt{27}$

$j = \sqrt{\frac{50}{63}} \times \sqrt{\frac{7}{2}}$

$k = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{45}} \times \sqrt{\frac{16}{7}} \times \sqrt{\frac{7}{9}}$

تمرين عدد 13:

بيّن أنّ x مقلوب y في كلّ حالة من الحالات التّالية:

أ) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $y = \frac{\sqrt{8}}{2}$

ب) $x = (3-2\sqrt{2})$ و $y = 3+2\sqrt{2}$

ج) $x=2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$ و $y=\sqrt{28}+\sqrt{27}$

د) $x=\sqrt{80}+\sqrt{81}$ و $y=9-2\sqrt{20}$

هـ) $y=2\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{11}$ $\quad x=2\sqrt{3}-\sqrt{11}$

رين عدد 14:

جد العدد الحقيقي x في كلّ حالة من الحالات التّالية:

- $|x|-\frac{1}{2}=\frac{-1}{3}$
- $|x+\pi|=\pi$
- $\sqrt{5}x-5=0$
- $-x+\sqrt{2}=0$
- $x\times(1+\sqrt{2})=1$
- $\sqrt{2x-1}=2\sqrt{3}$
- $\sqrt{x}=2\sqrt{2}$
- $|x|-\pi=-3{,}14$
- $|x-\sqrt{2}|=2\sqrt{2}$
- $\sqrt{2}x-\sqrt{2}=\sqrt{2}$
- $(x+\sqrt{2})+1=0$
- $\sqrt{(\sqrt{2}x-3\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}$
- $(2x-1)^2=9$
- $-x\times\sqrt{2}=1$

رين عدد 15:

تب العبارات التّالية حيث يكون مقامها عدد صحيح

$a=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	$c=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$	$e=\frac{2\sqrt{2}+3}{-2\sqrt{2}+3}$	$g=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
$b=\frac{3\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}-2}$	$d=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$	$f=\frac{5\sqrt{5}-10}{3\sqrt{5}}$	$h=\frac{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-1}}{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}-2}}$

رين عدد 16:

تبر العبارتين a و b حيث x عدد حقيقي:

$$a=2\sqrt{81x^2(2-4x)^2}-3\sqrt{25(2x-1)^2} \quad ; \quad b=\sqrt{(-5)^2}-\sqrt{(-2+5)^2}+\sqrt{(-2)^2}$$

احسب العبارة b.

أ) بيّن أنّ: $a=3|1-2x|(12|x|-5)$

ب) احسب القيمة العدديّة للعبارة a إذا كان: $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج) احسب القيمة العدديّة للعبارة a إذا كان: $|x|=2$ و $|2x^2-x|=6$ دون حساب قيمة x.

ين عدد 17:

ر العدد الحقيقي x حيث $|x|=6$ و $|x-1|=7$ دون البحث عن قيمة العدد x أوجد قيمة كلّ من

$|x^2$ و $\sqrt{(x^2-x)^2}$

Tunitests.tn

تمرين عدد 18:

نعتبر العبارتين التّاليتين A و B حيث :

$$A=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)-2-\sqrt{3} \quad ; \quad B=3-\sqrt{50}+\sqrt{8}$$

1) بيّن أنّ : $A=3\left(1-\sqrt{3}\right)$ و $B=3\left(1-\sqrt{2}\right)$

2) أحسب $A\times B$

3) بيّن أنّ: $2^{2010}\times\left[-A\left(\sqrt{3}+1\right)-B\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ يقبل القسمة على 12.

تمرين عدد 19:

a و b عددان حقيقيّان حيث :

$$a=\sqrt{9}-\sqrt{18}+\sqrt{50} \quad ; \quad b=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{18}$$

1) بيّن أنّ : $a=3+2\sqrt{2}$ و $b=3-2\sqrt{2}$

2) أ) أثبت أنّ a مقلوب b

ب)استنتج أنّ العدد الحقيقي b هو عدد موجب

ج)اختصر $|a(b+1)|-|b|$

3) أثبت أنّ : $15\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$ يقبل القسمة على 6

تمرين عدد 20:

x و y عددان حقيقيّان حيث:

$$y=\left(8+\sqrt{50}\right)-\left(9+4\sqrt{2}\right) \quad ; \quad x=\sqrt{6}\times\left(3\sqrt{3}-\sqrt{\frac{16}{3}}\right)+\left(1-2\sqrt{8}\right)$$

1) اختصر x و y.

2) بيّن أنّ x مقلوب y.

3) بيّن أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{y}\in\mathbb{N}$

4) احسب : $x\times\left(y-\frac{1}{x}\right)$

تمرين عدد 21:

فكّك إلى جذاء عوامل " ارات التّالية:

$$a=2x-\sqrt{2} \quad ; \quad b=\sqrt{5}x-\sqrt{20}$$

$$c=2x\left(x-1\right)-3\left(x-1\right) \quad ; \quad d=\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}x+\sqrt{10}$$

$$e=\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(x+1\right)-\left(x-1\right)\left(\sqrt{3}-2x\right) \quad ; \quad f=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(2x-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$g=\left(2x-4\right)\left(x-1\right)-6\left(x+1\right)\left(x-2\right) \quad ; \quad h=\left(3x-15\right)\left(2x+\sqrt{2}\right)-\left(2x-10\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)$$

تمرين عدد 22:

نعتبر العبارتين التّاليتين حيث x عدد حقيقي.

$$E = \sqrt{3}x-3 \quad ; \quad F=2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$$

1) أحسب E حيث $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) أ- فكّك E إلى جذاء عوامل

ب- بيّن أنّ : $F-E=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(2x+\sqrt{3}\right)$

3) أوجد x إذا كان : E= F

تمرين عدد 23:

نعتبر العبارة E التّالية حيث x عدد حقيقي: $E=-2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right)$

1) أ) أبيّن أنّ : $E=\sqrt{2}-2x$

ب)أوجد x إذا علمت أنّ : E=0

2) أ)فكّك العبارة E إلى جذاء عوامل.

ب)احسب E إذا كان x =0 .

3) لتكن العبارة F التّالية حيث x عدد حقيقي :

$F=3\left(\sqrt{2}x-1\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right)$

أ) فكّك العبارة F إلى جذاء عوامل

ب)بيّن أنّ: $E+F=\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x-1\right)$

4) جِدْ العدد الحقيقي x إذا كان E وF متقابلان.

تمارين الإختيار من متعدد:

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة

1) $-\sqrt{8}+\sqrt{18}$ يساوي:

❑ $\sqrt{10}$ ❑ $\sqrt{2}$ ❑ 1

2) $\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$ يساوي:

❑ $3\sqrt{3}$ ❑ 18 ❑ 6

3) $|\pi-3,14|$ يساوي:

❑ $\pi+3,14$ ❑ $-\pi+3,14$ ❑ $\pi-3,14$

4) مقابل $-1+\sqrt{2}$ هو:

❑ $\sqrt{2}-1$ ❑ $-1-\sqrt{2}$ ❑ $1-\sqrt{2}$

8)صحيح

إصلاح الدرس 3: العمليات في مجموعة الأعداد الحقيقية

تمرين عدد 1:

1) مقابل الأعداد $\sqrt{2}$ و $-\left(\frac{1}{2}\right)$ و $1+\sqrt{3}$ و $1-\sqrt{3}$ هي على التّوالي: $-\sqrt{2}$ و $-\frac{1}{2}$ و $-1-\sqrt{3}$ و $1+\sqrt{3}$

2)أ)

Tunitests.tn

$a+c=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$

$b+c=-\sqrt{2}-1+1-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

$c+d=1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=0$

ب) لدينا $a+b=0$ و منه مقابل العدد a هو العدد b

$c+d=0$ و منه مقابل العدد a هو العدد d

ج) $(a+c)+(b+d)=(a+b)+(c+d)=0+0=0$

3) مقابل $x-y$ هو $y-x$

مقابل $x+y$ هو $-x-y$

تمرين عدد 2:

$A=-\pi-(\sqrt{2}-\pi)=-\pi-\sqrt{2}+\pi$

$=\boxed{-\sqrt{2}}$

$B=-(\pi-3,14-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})$

$=-\pi+3,14+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}$

$=\boxed{4,14-\pi}$

$C=\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1=\frac{3}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$

$D=\left(-\frac{2}{7}-1\right)-\left(\sqrt{7}-\frac{2}{7}\right)$

$=-\frac{2}{7}-1-\sqrt{7}+\frac{2}{7}=\boxed{-1-\sqrt{7}}$

$E=\left(-\frac{5}{3}+\sqrt{2}\right)-\left[\left(\sqrt{2}-\frac{5}{3}\right)-\sqrt{3}\right]-\left(\sqrt{3}+\frac{4}{7}\right)$

$=-\frac{5}{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{5}{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\frac{4}{7}=\boxed{-\frac{4}{7}}$

$F=-(5\sqrt{5}-3)-(-7\sqrt{5}+5)+(2\sqrt{5}+2)$

$=-5\sqrt{5}+3+7\sqrt{5}-5+2\sqrt{5}+2$

$=\boxed{4\sqrt{5}}$

Tunitests.tn

$$= \boxed{4\sqrt{5}}$$

تمرين عدد 3:

$$a+b=\left(1-\sqrt{2}\right)-\left[\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{2}\right]+\left(-x+\sqrt{3}\right)-$$

$$\left(y-x-\sqrt{5}\right)+\left[\left(y-\sqrt{5}\right)-2\right]$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{1} + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{x} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{y} + \cancel{x} + \sqrt{5}$$

$$+y-\sqrt{5}-2=0$$

و منه a مقابل b.

تمرين عدد 4:

1)إذا كان $a=-1+\sqrt{2}$ فإنّ:

$$b=-\sqrt{2}+a=-\sqrt{2}-1+\sqrt{2}=-1$$

2) $E=-\left(\sqrt{2}-b\right)-\left[b-\left(a-\frac{3}{2}\right)\right]-\left(b-\frac{1}{2}\right)+1$

$$=-\sqrt{2}+b-b+a-\frac{3}{2}-b+\frac{1}{2}+1$$

$$=a-b-\sqrt{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$$

$$\left(a-b=-\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\right)$$

معطـــــــى

تمرين عدد 5:

1) $F=-b+\left[\left(\sqrt{3}-a\right)-\sqrt{2}\right]-\left[-\left(\sqrt{2}+b\right)+\left(1-b\right)\right]$

$$=-b+\sqrt{3}-a-\sqrt{2}+\sqrt{2}+b-1+b$$

$$=b-a+\sqrt{3}-1$$

2) أ) إذا كان $a=\sqrt{2}-1$ و $b=\sqrt{2}$ فإنّ:

$$F=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)+\sqrt{3}-1=\sqrt{2}-\sqrt{2}+1+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$$

ب) a و b متقابلان و $a=\sqrt{3}$ يعني $b=-a=-\sqrt{3}$

و منه $F=-\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=-\sqrt{3}-1$

3)إذا كانت $F=\sqrt{3}$ فإنّ: $b-a+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$

يعني $b-a=1$

تمرين عدد 6:

1) $X=(a-1)-\left[\left(1-\sqrt{5}\right)-(2-b)\right]$

$$=a-1-1+\sqrt{5}-2-b=a-b+\sqrt{5}$$

2)و بما أنّ $b-a=-\sqrt{5}$

فإنّ $X=-\left(-\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

3) X و b-1 متقابلان يعني: X + b-1=0

يعني $a-b+\sqrt{5}+b-1=0$

يعني $a+\sqrt{5}-1=0$

$a=1-\sqrt{5}$

تمرين عدد 7:

$$2\sqrt{2}\times\left(\frac{3}{2}\times\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}=2\times3=6$$

$$\left(\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\right)\times\left(-3\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\times(-3)\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-3$$

$$\pi\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{-1}{3\pi}\right)\times15=\pi\times\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times15=1\times(-1)=-1$$

$$\left(-5\times\sqrt{2}\right)\times\frac{2}{5}\times\sqrt{2}=-5\times\frac{1}{5}\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=-4$$

$$\left(-\frac{3}{2}\times\sqrt{2}\right)\times\left[\frac{2}{15}\times\left(-2\sqrt{2}\right)\right]=(3)\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{2}{15}=\frac{12}{15}$$

تمرين عدد 8:

إصلاح التمارين و الاختبارات

1) $a = -2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\sqrt{3}\times\left(3-\sqrt{3}\right)$

$= -\sqrt{3}+2+3\sqrt{3}-3$

$= \boxed{2\sqrt{3}-1}$

$b = 5\left(\sqrt{2}+1\right)-2\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}+1\right)$

$= 5\sqrt{2}+5-20-2\sqrt{2}$

$= \boxed{3\sqrt{2}-15}$

$c = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$

$= 2-\sqrt{2}-\sqrt{2}+2-1+\sqrt{2}$

$= \boxed{3-\sqrt{2}}$

$d = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$

$= \frac{1}{2}\left(3+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}-1\right)$

$= \boxed{1}$

$e = 2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)-3\sqrt{5}$

$= 10+2\sqrt{5}-3\sqrt{5}$

$= \boxed{10-\sqrt{5}}$

2) أ) $xy=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1$ و منه x مقلوب y.

ب) $xy=\left(-\sqrt{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-\cancel{2\sqrt{2}}-2+4+\cancel{2\sqrt{2}}\right)=1$

و منه x مقلوب y .

ج) $xy = -\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$

$= -\frac{1}{2}(1-3)=\frac{2}{2}=1$

و منه x مقلوب y .

د) $xy=\left[\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\right]\left[4-\sqrt{2}-\left(1-3\sqrt{2}\right)\right]$

$= \left(4+\cancel{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}-1-\cancel{\sqrt{2}}\right)\left(4-\sqrt{2}-1+3\sqrt{2}\right)$

$= \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$

$= 9+6\sqrt{2}-6\sqrt{2}-8=1$

و منه x مقلوب y.

تمرين عدد 9:

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ b=\sqrt{2}$

1) $a\times b=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$ و منه a مقلوب b

2) أ) $x = 4 + a\sqrt{2} - a\left(\sqrt{2}+2\right) \times b$

$= 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+2\right)\sqrt{2}$

$= 4 + 1 - \sqrt{2} - 2 = 3 - \sqrt{2}$

$y = -(a+b) \times b + \sqrt{2}$

$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= -\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= -3 + \sqrt{2}$

ب) $x + y = 3 - \sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} = 0$ و منه x مقابل y

تمرين عدد 10:

1) $I = \sqrt{2} - \left[\sqrt{3} - \left(\sqrt{5} - \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3}\right] + \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$

$= \sqrt{2} - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{5}} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{2} - \frac{6}{3} = \sqrt{2} - 2$

2) أ) $I \times \left(\sqrt{2}+2\right) = \left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right) = -2$

ب) الجداء $I \times \left(\sqrt{2}+2\right)$ سالب و $\sqrt{2}+2 \in \mathbb{R}_+$ و منه $I \in \mathbb{R}_-$

ج) $|I| = -I = -\left(\sqrt{2}-2\right) = 2 - \sqrt{2}$

3) $\left(x+\sqrt{2}\right)$ و I متقابلان يعني $I + \left(x+\sqrt{2}\right) = 0$

يعني $\sqrt{2} - 2 - x + \sqrt{2} = 0$

يعني $x = 2 - 2\sqrt{2}$

تمرين عدد 11:

1) $\left(a \in \mathbb{R}_-\right)$

$3 - a \in \mathbb{R}_+$ $\quad$ $3,14 - \pi \in \mathbb{R}_-$

$-1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+$

$\frac{22}{7} - \pi \in \mathbb{R}_+$ $\quad$ $\sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{R}_-$

$-\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+$ $\quad$ $-\sqrt{2} + a \in \mathbb{R}_-$

2) $\frac{a}{1-\sqrt{3}} \in \mathbb{R}_+$

$$A=\left|1-\sqrt{2}\right|+\left(1-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-1+1-\sqrt{2}=0$$

$$B=-\left|3-\sqrt{3}\right|-\left|3-\pi\right|=-\left(3-\sqrt{3}\right)-\left(\pi-3\right)$$

$$=-\cancel{3}+\sqrt{3}-\pi+\cancel{3}=\sqrt{3}-\pi$$

$$C=\left(-1+\sqrt{2}\right)-\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|-\left|-1+3\right|$$

$$=-1+\sqrt{2}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-2=2\sqrt{2}-\sqrt{3}-3$$

$$D=\frac{\left|1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\left|\sqrt{2}+1\right|}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{1}$$

$$=2-\sqrt{2}$$

$$E=\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}\right|$$

$$=\left|\frac{2+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}+1}{1}\right|=3$$

تمرين عدد 12:

$$a=-3\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{32}$$
$$=-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}$$
$$=-5\sqrt{2}$$

$$b=\sqrt{20}-\sqrt{45}+5\sqrt{5}$$
$$=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}$$
$$=4\sqrt{5}$$

$$c=2\sqrt{125}-3\sqrt{75}+\sqrt{500}$$
$$=10\sqrt{5}-15\sqrt{5}+10\sqrt{5}$$
$$=5\sqrt{5}$$

$$d=\sqrt{125}-\sqrt{5}=5\sqrt{5}-\sqrt{5}$$
$$=4\sqrt{5}$$

$$e=-\sqrt{20}+3\sqrt{3}\sqrt{15}+6\sqrt{5}$$
$$=-2\sqrt{5}+3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{5}-6\sqrt{5}$$
$$=-2\sqrt{5}+9\sqrt{5}-6\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

$$f=-\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{72}$$
$$=-5\sqrt{2}+4\sqrt{2}+6\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$$g=-2\sqrt{18}+\sqrt{200}-\sqrt{8}$$
$$=-6\sqrt{2}+10\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

$$h=\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$$I=-\sqrt{162}-\sqrt{12}+\sqrt{50}+\sqrt{27}$$
$$=-9\sqrt{2}-2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+3\sqrt{3}$$
$$=-4\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$J=\sqrt{\frac{50}{63}}\times\sqrt{\frac{7}{2}}$$
$$=\frac{5\cancel{\sqrt{2}}}{3\cancel{\sqrt{7}}}\times\frac{\cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{5}{3}$$

$$K=\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{45}}\times\sqrt{\frac{16}{7}}\times\sqrt{\frac{7}{9}}$$
$$=\frac{4\cancel{\sqrt{5}}}{3\cancel{\sqrt{5}}}\times\frac{4}{\cancel{\sqrt{7}}}\times\frac{\cancel{\sqrt{7}}}{3}=\frac{16}{9}$$

تمرين عدد 13:

أ) $xy=\frac{\sqrt{8}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

ومنه x مقلوب y .

ب)

$xy=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}-8=1$

و منه x مقلوب y.

ج) $xy=(2\sqrt{7}-3\sqrt{3})(\sqrt{28}+\sqrt{27})$

$=(2\sqrt{7}-3\sqrt{3})(2\sqrt{7}+3\sqrt{3})$

$=28-27=1$

و منه x مقلوب y

د) $xy=(\sqrt{80}+\sqrt{81})(9-2\sqrt{20})$

$=(4\sqrt{5}+9)(9-4\sqrt{5})$

$=81-80=1$

و منه x مقلوب y

هـ)

$xy=(2\sqrt{3}-\sqrt{11})(2\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{11})$

$=(2\sqrt{3}-\sqrt{11})(4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}+\sqrt{11})$

$=(2\sqrt{3}-\sqrt{11})(2\sqrt{3}+\sqrt{11})=12-11=1$

و منه x مقلوب y

تمرين عدد 14:

- $|x|-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$ يعني $|x|=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$
- يعني $|x|=\frac{1}{6}$ يعني $x=-\frac{1}{6}$ أو $x=\frac{1}{6}$
- $|x+\pi|=\pi$ يعني $x+\pi=-\pi$ أو $x+\pi=\pi$

  يعني $x=0$ أو $x=-2\pi$
- $\sqrt{5}x-5=0$ يعني $x=\frac{5}{\sqrt{5}}$ يعني $x=\sqrt{5}$
- $-x+\sqrt{2}=0$ يعني $x=\sqrt{2}$
- $x(1+\sqrt{2})=1$ يعني $x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

  يعني $x=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}$ يعني $x=\sqrt{2}-1$
- $\sqrt{2x-1}=2\sqrt{3}$ يعني $\sqrt{2x-1}=\sqrt{12}$

  يعني $2x-1=12$ يعني $x=\frac{13}{2}$
- $\sqrt{x}=2\sqrt{2}$ يعني $\sqrt{x}=\sqrt{8}$ يعني $x=8$

  يعني $|x|=\pi-3,14$

- $|x|-\pi=3,14$

  يعني $x=\pi+3,14$ أو $x=3,14-\pi$

- $|x-\sqrt{2}|=2\sqrt{2}$

  يعني $x-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ او $x-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

  يعني $x=3\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

- $\sqrt{2}x-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ يعني $\sqrt{2}x=2\sqrt{2}$ يعني $x=2$

- $-x\sqrt{2}=1$ يعني $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ يعني $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

- $\left(x+\sqrt{2}\right)+1=0$ يعني $x=-1-\sqrt{2}$

- $\sqrt{\left(\sqrt{2}x-3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8}$ يعني $|\sqrt{2}x-3\sqrt{2}|=2\sqrt{2}$

  يعني $\sqrt{2}x-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ أو $\sqrt{2}x-3\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

  يعني $x=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=5$ أو $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

- $(2x-1)^2=9$

  يعني $2x-1=3$ أو $2x-1=-3$

  يعني $x=2$ أو $x=-1$

تمرين عدد 15:

$$a=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$b=\frac{3\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}-2}=\frac{\left(3\sqrt{3}-6\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}$$

$$=\frac{9+\cancel{6\sqrt{3}}-\cancel{6\sqrt{3}}-12}{-1}=3$$

$$c=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$=3-2\sqrt{2}$$

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\sqrt{2}+1$$

$$e=\frac{2\sqrt{2}+3}{-2\sqrt{2}+3}=\frac{\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(-2\sqrt{2}-3\right)}{\left(-2\sqrt{2}+3\right)\left(-2\sqrt{2}-3\right)}$$

$$=\frac{-8-6\sqrt{2}-6\sqrt{2}-9}{-1}=17+12\sqrt{2}$$

$$f=\frac{5\sqrt{5}-10}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\left(5\sqrt{5}-10\right)}{3\sqrt{5}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{25-10\sqrt{5}}{15}=\frac{5-2\sqrt{5}}{3}$$

$$g=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}-\frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=2+\sqrt{2}-3-2\sqrt{3}=-1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

$$h=\frac{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-1}}{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}-2}}=\frac{\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}}{\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(2\sqrt{5}+2\right)}{\left(2\sqrt{5}-2\right)\left(2\sqrt{5}+2\right)}}$$

$$=\frac{\frac{5+\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2}{4}}{\frac{10+2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+4}{16}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}\times\frac{16}{14+6\sqrt{5}}$$

$$=\frac{4\left(3-\sqrt{5}\right)}{14+6\sqrt{5}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{7+3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)}{\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(36-16\sqrt{5}\right)}{4}=18-8\sqrt{5}$$

أو

$$h=\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(2\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=\frac{14-6\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left(14-6\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{72-32\sqrt{5}}{4}$$

$$=18-8\sqrt{5}$$

تمرين عدد 16:

1) $b=\sqrt{(-5)^2}-\sqrt{(-2+5)^2}+\sqrt{(-2)^2}$

$$=5-3+2=4$$

2) أ) $a=2\sqrt{81x^2\left(2-4x\right)^2}-3\sqrt{25\left(2x-1\right)^2}$

$$=2\sqrt{\left[9x\left(2-4x\right)\right]^2}-3\sqrt{\left[5\left(2x-1\right)\right]^2}$$

$$=2\left|9x\left(2-4x\right)\right|-3\left|5\left(2x-1\right)\right|$$

$$=18\left|x\left(2-4x\right)\right|-15\left|2x-1\right|$$

$$= 18|x||-2(2x-1)| - 15|2x-1|$$
$$= 18|x| \times 2 \times |2x-1| - 15|2x-1|$$
$$= |2x-1|[36|x|-15]$$
$$= 3|2x-1|(12|x|-5)$$

ب) إذا كان $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإنّ:

$$a = 3\left|2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\right|\left(12\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-5\right)$$
$$= 3\left|2-\sqrt{2}-1\right|\left(12\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right|-5\right)$$
$$= 3\left(\sqrt{2}-1\right)\left(12\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)-5\right)$$
$$= 3\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(12-6\sqrt{2}-5\right)$$
$$= 3\left(\sqrt{2}-1\right)\left(7-6\sqrt{2}\right)$$
$$= 3\left(7\sqrt{2}-12-7+6\sqrt{2}\right)$$
$$= 3\left(13\sqrt{2}-19\right)$$

ج) إذا كان $|x| = 2$ و $|2x^2 - x| = 6$

$|2x^2 - x| = 6$ يعني $|x(2x-1)| = 6$

يعني $|x||2x-1| = 6$ يعني $|2x-1| = 3$

$$a = 3\times 3\times(12\times 2-5)$$
$$= 9\times(24-5) = 9\times 19 = 171$$ و منه

تمرين عدد 17:

$|x| = 6$ و $|x-1| = 7$

$$|x^2 - x| = |x(x-1)|$$
$$= |x||x-1| = 6\times 7 = 42$$
$$\sqrt{(x^2-x)^2} = |x^2-x| = 42$$

تمرين عدد 18:

1) $A = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right) - 2 - \sqrt{3}$

$B = 3 - \sqrt{50} + \sqrt{8}$

$$A = 8 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 3 - 2 - \sqrt{3}$$
$$= 3 - 3\sqrt{3}$$
$$= 3\left(1 - \sqrt{3}\right)$$
$$B = 3 - \sqrt{50} + \sqrt{8}$$
$$= 3 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$= 3 - 3\sqrt{2}$$
$$= 3(1 - \sqrt{2})$$

2) $A \times B = 3\left(1-\sqrt{2}\right)\left(3\left(1-\sqrt{3}\right)\right)$

$$= 9\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)$$

3) $-A\left(\sqrt{3}+1\right) - B\left(\sqrt{2}+1\right)$

$$= -3\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right) - 3\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$$
$$= -3\times(-2) - 3\times(-1) = 9$$

و منه:

$$\left[-A\left(\sqrt{3}+1\right) - B\left(\sqrt{2}+1\right)\right] \times 2^{2010} = 9 \times 2^{2010}$$

لدينا 3 يقسم 9×2^{2010} لأنّه يقسم العدد 9

4 يقسم 9×2^{2010} لأنّه يقسم العدد 2^{2010}

3 و 4 أوّليّان فيما بينهما

⇦ إذن 3× 4 = 12 يقسم العدد

$$\left[-A\left(\sqrt{3}+1\right) - B\left(\sqrt{2}+1\right)\right] 2^{2010} = 9 \times 2^{2010}$$

تمرين عدد 19:

1) $a = \sqrt{9} - \sqrt{18} + \sqrt{50}$

$$= 3 - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$
$$= 3 + 2\sqrt{2}$$
$$b = \left(1+\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-1\right) - \sqrt{18}$$
$$= 2\sqrt{2} - 1 + 4 - \sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$
$$= 3 - 2\sqrt{2}$$

2)أ) $ab = \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$$= 9 - 8 = 1$$

و منه a مقلوب b

ب) لدينا الجذاء ab عدد موجب و a عدد موجب

و منه العدد b عدد موجب.

ج) $\left|a\left(b+1\right)\right| - \left|b\right| = \left|a\right|\left|b+1\right| - \left|b\right|$

$$= a\left(b+1\right) - b = ab + a - b$$

3) $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\times 15\sqrt{2}=(a-b)15\sqrt{2}$

$=\left(\cancel{\beta}+2\sqrt{2}-\cancel{\beta}+2\sqrt{2}\right)15\sqrt{2}$

$=4\sqrt{2}\times 15\sqrt{2}=120$

و العدد 120 يقبل القسمة على 6.

تمرين عدد 20:

1) $x=\sqrt{6}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{\frac{16}{3}}\right)+\left(1-2\sqrt{8}\right)$

$=\sqrt{2}\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)+1-4\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}-4\sqrt{2}+1-4\sqrt{2}$

$=1+\sqrt{2}$

$y=\left(8+\sqrt{50}\right)-\left(9+4\sqrt{2}\right)$

$=8+5\sqrt{2}-9-4\sqrt{2}=-1+\sqrt{2}$

2) $xy=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=2-1=1$

و منه x مقلوب y

3) $\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{y}=\sqrt{2}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\sqrt{2}y+x$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)+\sqrt{2}+1$

$=2-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{2}}+1$

$=3\in\mathbb{N}$

4) $x\times\left(y-\frac{1}{x}\right)=x(y-y)=0 \qquad \left(\frac{1}{x}=y\right)$

تمرين عدد 21:

$a=2x-\sqrt{2}=\sqrt{2}\sqrt{2}x-\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right)$

$b=\sqrt{5}x-\sqrt{20}=\sqrt{5}x-2\sqrt{5}$

$=\sqrt{5}\left(x-2\right)$

$c=2x\left(x-1\right)-3\left(x-1\right)=\left(x-1\right)\left(2x-3\right)$

$d=\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}x+\sqrt{2}\sqrt{5}$

$=\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\left(x-\sqrt{2}\right)$

$=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$

$e=(2x-\sqrt{3})(x+1)-(x-1)(\sqrt{3}-2x)$

$=(2x-\sqrt{3})(x+\not{1}+x-\not{1})$

$=2x(2x-\sqrt{3})$

$f=(x-\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

$=(x-\sqrt{3})(2x-\sqrt{3}-\sqrt{3})=(x-\sqrt{3})(2x-2\sqrt{3})$

$=2(x-\sqrt{3})^2$

$g=(2x-4)(x-1)-6(x+1)(x-2)$

$=(x-2)(2(x-1))-6(x+1)$

$=(x-2)(-4\times-8)$

$=-4(x-2)(x+2)$

$h=(3x-15)(2x+\sqrt{2})-(2x-10)(x-2\sqrt{2})$

$=3(x-5)(2x+\sqrt{2})-2(x-5)(x-2\sqrt{2})$

$=(x-5)(6x+3\sqrt{2}-2x+4\sqrt{2})$

$=(x-5)(4x+7\sqrt{2})$

تمرين عدد 22:

$E=\sqrt{3}x-3$ $\quad F=2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

1) أ) إذا كان $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ فإنّ : $E=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-3=1-3=-2$

ب) إذا كان $x=2$ فإنّ:

$F=2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2(4-3)=2$

2)أ) $E=\sqrt{3}x-3=\sqrt{3}x-\sqrt{3}\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

ب) $F-E=2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

$=(x-\sqrt{3})(2x+2\sqrt{3}-\sqrt{3})$

$=(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})$

3)إذا كان $E=F$ فإنّ : $E-F=0$ و منه :

$(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})=0$

يعني $2x+\sqrt{3}=0$ أو $x-\sqrt{3}=0$

يعني $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $x=\sqrt{3}$

تمرين عدد 23:

1) أ) $E=-2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right)$

$E=\left(\sqrt{2}x-1\right)\left[-2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right]$

$=\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(-\sqrt{2}\right)$

$=-2x+\sqrt{2}=\sqrt{2}-2x$

ب) $E=0$ يعني $-2x+\sqrt{2}=0$

يعني $-2x=-\sqrt{2}$ يعني $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) أ) $E=\sqrt{2}-2x=\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}x$

$=\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}x\right)$

ب) إذا كان $x=0$ فإنّ:

$E=\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\times 0\right)=\sqrt{2}$

3) أ) $F=3\left(\sqrt{2}x-1\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right)$

$=\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$

ب) $E+F=\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}x\right)+\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$

$=-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$

$=\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(-\sqrt{2}+3-\sqrt{2}\right)$

$=\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x-1\right)$

ج) E و F متقابلان يعني $E+F=0$

يعني $\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x-1\right)=0$

يعني $\sqrt{2}x-1=0$

يعني $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

تمارين الاختيار من متعدد:

1) $-\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{2}$

2) $\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=6$

3) $|\pi-3{,}14|=\pi-3{,}14$

4) مقابل العدد $\sqrt{2}-1$ هو العدد $-1+\sqrt{2}$

5) $a=0$

6) مقلوب العدد الحقيقي $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ هو $\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

7) العدد $3+2\sqrt{2}$ هو مقلوب $3-2\sqrt{2}$ و $3+2\sqrt{2}=\left|2\sqrt{2}-3\right|$

8) x مقابل y.

9) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}$

10) $MN=1+\sqrt{2}$

$\sqrt{-9+25}=4$