

الدرس 5: الترتيب و المقارنة

تمرين عدد 1:

$$a \leq b \text{ إذن } a - b \leq 0 \text{ و } a - b = -\sqrt{2} \quad (1)$$

$$x = \sqrt{8} - (a + \sqrt{18}) = 2\sqrt{2} - a - 3\sqrt{2} = -a - \sqrt{2} \quad (2) \text{ أ}$$

$$y = x = (5\sqrt{2} - b) - \sqrt{32}$$

$$= 5\sqrt{2} - b - 4\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} - b$$

$$x = \sqrt{2} - b - (-a + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - b + a - \sqrt{2} \quad (\text{ب})$$

$$= a - b \leq 0$$

ومنه $x \leq y$

تمرين عدد 2:

$$|x - y - \sqrt{2}| - |y - x| + \sqrt{2}$$

$$= |(x - y) + (-\sqrt{2})| - |y - x| + \sqrt{2}$$

$$= -(x - y - \sqrt{2}) - (y - x) + \sqrt{2}$$

$$= -x + y + \sqrt{2} - y + x + \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\begin{cases} x - y + (-\sqrt{2}) \in \mathbb{R}_- \\ y - x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad \text{لأن:}$$

تمرين عدد 3:

$$x - y = \frac{2}{5}a + 4b - 5b + \frac{3}{5}a \quad (1)$$

$$= a - b \geq 0$$

ومنه $x \geq y$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad (2) \quad \text{نلاحظ أن}$$

$$x + \pi - \sqrt{18} \geq y + \pi - 3\sqrt{2} \quad \text{لدينا } x \geq y \text{ ومنه}$$

تمرين عدد 4:

(أ)

$$x - y = -b - \sqrt{18} - (-a - 2\sqrt{2})$$

$$= -b - 3\sqrt{2} + a + 2\sqrt{2}$$

$$= a - b - \sqrt{2}$$

$$= (a - b) + (-\sqrt{2}) \leq 0$$

(مجموع عددين سالبين) ومنه $x \leq y$

$$x - y = (2\sqrt{3} + a) - b - (\sqrt{27} - b) \quad (\text{ب})$$

$$= 2\sqrt{3} + a - b - 2\sqrt{3} + b$$

$$= a \leq 0$$

(معطى) ومنه $x \leq y$

$$x - y = -(\pi + 3) + b - (-2\pi + a) \quad (\text{ج})$$

$$= -\pi - 3 + b + 2\pi - a$$

$$= (\pi - 3) + (b - a) \geq 0$$

(مجموع عددين موجبين) ومنه $x \geq y$

تمرین عدد 5:

$$z - y = (z - x) + (x - y) = \frac{-\sqrt{18}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$
$$= \frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

(2) $z - y$ عدد سالب و منه $z \leq y$

$$(-z - \pi + 2\sqrt{2}) - (-y + \sqrt{8} - \pi) = \quad (3)$$

$$= -z - \pi + 2\sqrt{2} + y - 2\sqrt{2} + \pi$$
$$= y - z \geq 0$$

و منه $-z - \pi + 2\sqrt{2} \geq -y + \sqrt{8} - \pi$

تمرین عدد 6:

$$a = 2\sqrt{2} - \sqrt{27} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \quad (1)$$

$$b = \sqrt{8} - \sqrt{48} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$$

(2) لدينا $-4\sqrt{3} \leq -3\sqrt{3}$ و منه

$$b \leq a \quad \text{إذن } 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3} \leq -3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

(3) لدينا:

$$\sqrt{2}\sqrt{8}\sqrt{5} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5}$$
$$= 4\sqrt{5} = 2\sqrt{20}$$

$b \leq a$ و منه:

$$b - \sqrt{2}\sqrt{8}\sqrt{5} \leq a - 2\sqrt{20}$$

(أظفنا نفس العدد إلى كلا الطرفين)

تمرین عدد 7:

$$A = -\sqrt{27} - (x - 3\sqrt{2}) - [(\sqrt{32} - y) - \sqrt{12}] \quad (1)$$

$$= -3\sqrt{3} - x + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + y + 2\sqrt{3}$$

$$= -x + y - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$(2) \text{ إذا كان } A = \sqrt{8} - \sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$-x + y - \sqrt{2} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$-x + y = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{2} \geq 0$$

و منه $-x + y \geq 0$ إذن $y \geq x$

تمرین عدد 8:

$$(1) \text{ لدينا } -y + x + \sqrt{2} < -\sqrt{3}$$

$$x < (-\sqrt{3}) + (y - \sqrt{2})$$

إذن $x < 0$

($(-\sqrt{3}) + (y - \sqrt{2})$) هو مجموع عددين سالبين فهو عدد سالب.

(2) لدينا:

$$\begin{aligned}x - \sqrt{2} &\leq 2 \\+ \\-y + \sqrt{2} &\leq -2 \\ \hline x - y &\leq 0\end{aligned}$$

ومنه $x \leq y$

تمرين عدد 9:

(1) نلاحظ أن $\sqrt{18} = 2\sqrt{2}$ و $-\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

لدينا $a < b$ ومنه $-\frac{2}{\sqrt{2}}a > -\sqrt{2}b$ إذن

$$\frac{-2}{\sqrt{2}}a + 2\sqrt{2} > -\sqrt{2}b + \sqrt{18}$$

(2) لدينا $a < b$ ومنه $3a < 3b$ إذن:

$$3a - \sqrt{3} < 3b - \sqrt{3}$$

(ب) لدينا $3a - \sqrt{3} < 3b - \sqrt{3}$ ومنه

$$\sqrt{3}(\sqrt{3}a - 1) < \sqrt{3}(\sqrt{3}b - 1)$$

إذن $\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}(\sqrt{3}a - 1) < \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}(\sqrt{3}b - 1)$

يعني $\sqrt{3}a - 1 < \sqrt{3}b - 1$

يعني $\sqrt{3}\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \sqrt{3}\left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(3) $\frac{2a+b}{3} - a = \frac{2a+b-3a}{3} = \frac{b-a}{3} > 0$

ومنه $\frac{2a+b}{3} > a$

(ب) $\frac{2a+b}{3} - b = \frac{2a+b-3b}{3}$

$$= \frac{2a-2b}{3} = \frac{2(a-b)}{3} < 0$$

ومنه $\frac{2a+b}{3} < b$

تمرين عدد 10:

(أ) $b - a = (-3 + \sqrt{3}) - (-2) = \sqrt{3} - 1 > 0$

ومنه $b > a$

(ب)

$$a-b = \sqrt{3} - \sqrt{5} - (-\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{2} - \sqrt{5} < 0$$

ومنه $a < b$

ج) $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ ومنه $2\sqrt{3} < 2\sqrt{5}$ أي $b < a$

د) لدينا $\begin{cases} -3 < -2 \\ \sqrt{7} < \sqrt{11} \end{cases}$ ومنه $-3 + \sqrt{7} < -2 + \sqrt{11}$ أي $b < a$

هـ) لدينا $\sqrt{5} < \sqrt{7}$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{7}}$ وبالتالي

$$a < b \text{ أي } \frac{-2}{\sqrt{5}} < \frac{-2}{\sqrt{7}}$$

و) $4\sqrt{5} > 5\sqrt{3}$ ومنه $b > a$ أي $80 > 75$

$$\begin{cases} (5\sqrt{3})^2 = 75 \\ (4\sqrt{5})^2 = 80 \end{cases}$$

ك) $b - a = -4 + \sqrt{2} - (-3) = \sqrt{2} - 1 > 0$

ومنه $b > a$

ل) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$ و $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$

ب) $b > a$ أي $\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ومنه $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$

تمرين عدد 11:

أ) $(4\sqrt{3})^2 = 48$ و $(5\sqrt{2})^2 = 50$

$4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$ ومنه $48 < 50$

ب) لدينا:

$$4\sqrt{3} - \sqrt{2} < 5\sqrt{2} - 1 \text{ ومنه } \begin{cases} 4\sqrt{3} < 5\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} < -1 \end{cases}$$

أ) لدينا $4\sqrt{3} - \sqrt{2} < 5\sqrt{2} - 1$ إذن:

(عددين موجبين) $\frac{1}{4\sqrt{3} - \sqrt{2}} > \frac{1}{5\sqrt{2} - 1}$

بالتالي $\frac{2}{4\sqrt{3} - \sqrt{2}} > \frac{2}{5\sqrt{2} - 1}$

ب) لدينا: $\frac{1}{4\sqrt{3} - \sqrt{2}} > \frac{1}{5\sqrt{2} - 1}$

إذن: $1 - \sqrt{2} < 0$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} - \sqrt{2}} < \frac{1 - \sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 1}$$

تمرین عدد 12:

لدينا $x < -1$ إذن x و $x+1$ عددان سالبان

$$a = -|x| + x = -(-x) + x = 2x$$

$$\begin{aligned} b &= -2x - |2x+2| \\ &= -2x - |2(x+1)| \\ &= -2x - 2(-x-1) \end{aligned}$$

$$b = -\cancel{2x} + \cancel{2x} + 2 = 2$$

$$\begin{aligned} c &= |x-1| - |2(-1-x)| = -x+1-2(-1-x) \\ &= -x+1+2+2x \\ &= x+3 \end{aligned}$$

تمرین عدد 13:

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 \quad (1) \text{ أ}$$

$$x^2 - y^2 = (\sqrt{245})^2 - (2\sqrt{61})^2 = 245 - 244 = 1 \quad (ب)$$

$x^2 - y^2 > 0$ و منه $x^2 > y^2$ و x و y عددان موجبان إذن: $x > y$.

$$(2) \text{ لدينا: } (x-y)(x+y) = 1$$

$$\text{أي } (7\sqrt{5} - \sqrt{244})(7\sqrt{5} + \sqrt{244}) = 1$$

تمرین عدد 14:

$$x - y = \left(\frac{7}{6}a - \frac{2}{3}b\right) - \left(\frac{1}{3}b + \frac{1}{6}a\right) \quad (1) \text{ أ}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{7}{6}a - \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}a \\ &= a - b > 0 \end{aligned}$$

و منه $x > y$

$$(ب) \text{ لدينا } x > y \text{ و منه } -\sqrt{3}x < -\sqrt{3}y$$

$$\left. \begin{aligned} -\sqrt{3}x + 1 < -\sqrt{3}y + \frac{5}{4} \text{ و منه} \\ 48 < 49 \text{ إذن} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-\sqrt{3}x < -\sqrt{3}y \quad (2) \text{ أ} \\ &1 < \frac{5}{4} \\ &(4\sqrt{3})^2 = 48 \\ &7^2 = 49 \end{aligned}$$

$$(ب) \text{ لدينا } 4\sqrt{3} < 7 \text{ و منه } 4\sqrt{3} + 7 < 14$$

$$(ج) \text{ لدينا } 4\sqrt{3} < 7 \text{ و منه } 4\sqrt{3} - 4 < 3 \text{ أي } 4(\sqrt{3} - 1) < 3$$

$$\text{و منه } \frac{1}{4(\sqrt{3} - 1)} > \frac{1}{3} \quad (3) \text{ (عددین موجبین)}$$

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{27} - |4\sqrt{3} - 7| - |-4\sqrt{3} - 7| \\
&= 3\sqrt{3} - (-4\sqrt{3} + 7) - (4\sqrt{3} + 7) \\
&= 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 7 - 4\sqrt{3} - 7 \\
&= 3\sqrt{3} - 14
\end{aligned}$$

تمرين عدد 15:

$$\begin{aligned}
a &= 2\sqrt{18} - \sqrt{3}\sqrt{15} = 2 \times 3\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{5} \quad (أ) \\
&= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{8}(1+\sqrt{2}) - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}) - 3\sqrt{5} \\
&= 2\sqrt{2} + 4 - 3\sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a-b &= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 4 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} \quad (ب) \\
&= 4\sqrt{2} - 4
\end{aligned}$$

$$\sqrt{2} > 1 \text{ و } a-b = 4(\sqrt{2}-1) \text{ لدينا (ج)}$$

$$a > b \text{ و منه } a-b > 0$$

$$(2) \text{ نلاحظ أن: } \frac{1-a}{a} = \frac{1}{a} - 1$$

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ لدينا: } a > b \text{ و } a \text{ و } b \text{ لهما نفس العلامة + إذن:}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a} < \frac{\sqrt{2}}{b} \text{ و منه}$$

$$\sqrt{2} \times \left(\frac{1-a}{a} \right) < \frac{\sqrt{2}}{b} - 1 \text{ و منه } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{a} < \frac{\sqrt{2}}{b} \\ -\sqrt{2} < -1 \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\sqrt{2} \times \left(\frac{1-a}{a} \right) < \frac{\sqrt{2}}{b} - 1 \text{ أي}$$

تمرين عدد 16:

$$A = \sqrt{600} - 5\sqrt{6} - \sqrt{24} \quad (1)$$

$$= 10\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

$$B = 6\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$$

$$= 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - AB - B^2$$

$$= A^2 - B^2 = (3\sqrt{6})^2 - (5\sqrt{2})^2$$

$$= 54 - 50 = 4$$

$$(2) \text{ لدينا: } (A-B)(A+B) > 0 \text{ و } A+B > 0$$

$$\text{إذن } A-B > 0 \text{ و منه } A-B \in \mathbb{R}_+$$

ب) $A > B$ إذن $A - B \in \mathbb{R}_+$

3) لدينا: $A > B$ ومنه $-\sqrt{2}A < -\sqrt{2}B$

$$-\sqrt{2}A + 1 < -\sqrt{2}(B - 1) \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} -\sqrt{2}A < -\sqrt{2}B \\ 1 < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{-\sqrt{2}A + 1} > \frac{1}{-\sqrt{2}(B - 1)} \quad \text{والعددان سالبان ومنه:}$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{-\sqrt{2}(B - 1)} > \frac{1 - \sqrt{3}}{-\sqrt{2}A + 1} \quad \text{ومنه}$$

تمرين عدد 17:

$$(1) \quad \sqrt{a} < \sqrt{a+1} \quad \text{و} \quad a < a+1 \quad \text{عدد موجب قطعاً فإن:}$$

$$(2) \quad 2\sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{a+1} \quad \text{ومنه} \quad \sqrt{a} < \sqrt{a+1}$$

$$(3) \quad \sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

لدينا: $\sqrt{a} + \sqrt{a+1} > 2\sqrt{a}$ ومنه

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{2a} > \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} \quad \text{وبالتالي:}$$

تمرين عدد 18:

$$a = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{3} \quad (أ)$$

$$= 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$b = \frac{\sqrt{35} \times \sqrt{24}}{\sqrt{21} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5} \sqrt{7} \times 2\sqrt{2} \sqrt{3}}{\sqrt{3} \sqrt{7} \times \sqrt{5} \sqrt{2}} = 2$$

ومنه $a < b$

(أ) لدينا:

$$\begin{cases} 9 < 12 \quad \text{ومنه} \\ (2\sqrt{3})^2 = 12 \\ 3^2 = 9 \end{cases}$$

$$x = |3 - 2\sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2| \quad (أ) (1)$$

$$= -3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2 = \sqrt{3} - 1$$

$$y = -\sqrt{108} + \sqrt{4} + \sqrt{75}$$

$$= -6\sqrt{3} + 2 + 5\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$y - x = 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 = 3 - 2\sqrt{3} \quad (ب)$$

$$3^2 = 9 \text{ و } (2\sqrt{3}^2) = 12 \text{) } 3 < 2\sqrt{3} \text{ و}$$

ومنه $(2\sqrt{3} > 3)$ وبالتالي : $y - x < 0$ أي $y < x$.
 ج) لدينا : $x < y$ ومنه $2x < x + y$

$$\text{والعددان } 2x \text{ و } x + y \text{ موجبان فإن } \frac{1}{2x} > \frac{1}{x + y}$$

تمرين عدد 19:

من الكتابة $x < 1 < y$ نستنتج أن $x - 1 < 0$ و $y > 0$
 و $x - y < 0$ و $y - 1 > 0$

$$\begin{aligned} & |y(x-1)| - y|x-y| + |y^2 - y| \\ & = |y||x-1| - y|x-y| + |y||y-1| \\ & = y(-x+1) - y(-x+y) + y(y-1) \\ & = -xy + \cancel{y} + xy - y^2 + y^2 - \cancel{y} = 0 \end{aligned}$$

تمارين الاختيار من متعدد:

$$(1) \quad x+1 < 2 \text{ يعني } x-1 \text{ عدد سالب.}$$

$$(2) \quad \frac{1}{-\sqrt{2a}-1} < \frac{1}{-\sqrt{2b}-1} \text{ يعني } a < b$$

$$(3) \quad y \geq 0 \text{ يعني } y = x^2$$

$$(4) \quad 2x+3 \geq 5 \text{ يعني } x \geq 1$$

$$(5) \quad \frac{x}{\sqrt{2}} \geq \frac{y}{\sqrt{2}} \text{ يعني } x \geq y$$

$$(6) \quad (1-\sqrt{3})a > (1-\sqrt{3})b \text{ يعني } a < b$$

$$(7) \quad a < \frac{a+b}{2} \text{ يعني } a < b$$

$$(8) \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}x - 1 \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{3} \text{ يعني } x \leq y$$

$$(9) \quad -a + b > 0$$

$$(10) \quad \sqrt{2} - x > 0 \text{ يعني } x < \sqrt{2}$$

$$(11) \quad \frac{1}{1-\sqrt{3}} < -1$$

$$(12) \quad 2 - \frac{1}{2} \geq \frac{-\sqrt{3}}{2} + 1$$