II. المجالات

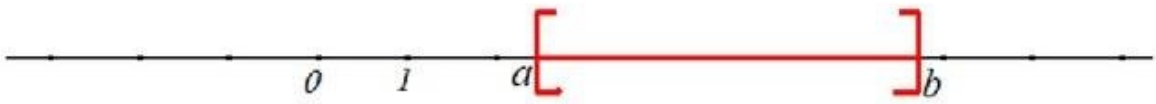
1. المجالات المحدودة:

أ) نعتبر $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}$ بحيث $a<b$.

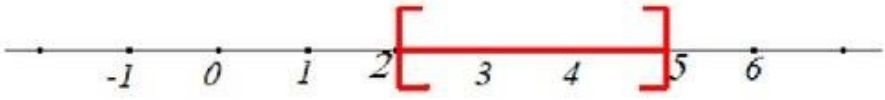
المجموعة $I=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ a\le x\le b\}$

تسمّى مجالًا مغلقًا طرفاه a و b.

نرمز لهذا المجال بِـ $[a\ ;\ b]$ و نمثّله على المستقيم العددي كما يلي:



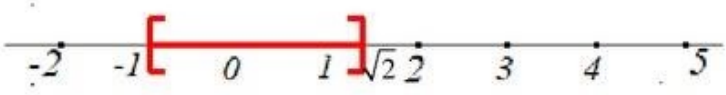
مثال 1: المجموعة $I=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ 2\le x\le 5\}$ هي المجال المغلق $[2\ ;\ 5]$



لنا $3\in I$ لأنّ $2\le 3\le 5$ و $\pi\in I$ لأنّ $2\le\pi\le 5$

بينما $\sqrt{2}\notin I$ لأنّ العدد $\sqrt{2}$ ليس محصورًا بين 2 و 5.

مثال 2: المجموعة $J=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ -1\le x\le\sqrt{2}\}$ هي المجال المغلق $[-1\ ;\ \sqrt{2}]$



لنا $1\in J$ لأنّ $-1\le 1\le\sqrt{2}$ و $\pi-2\in J$ لأنّ $-1\le\pi-2\le\sqrt{2}$

بينما $2\notin J$ لأنّ العدد $2>\sqrt{2}$ ليس محصورًا بين -1 و $\sqrt{2}$.

ب) نعتبر $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ بحيث $a < b$.

المجموعة $I = \{ x \in \mathbb{R} ; a < x < b \}$

تسمّى مفتوحًا طرفاه a و b.

نرمز لهذا المجال بِـ $]a ; b[$ و نمثّله على المستقيم العددي كما يلي:

مثال 1: المجموعة $I = \{ x \in \mathbb{R} ; 1 < x < 3 \}$ هي المجال المفتوح $]1 ; 3[$

لنا $\frac{3}{2} \in I$ لأنّ $1 < \frac{3}{2} < 3$ و $\sqrt{2} \in I$ لأنّ $1 < \sqrt{2} < 3$

بينما $\pi \notin I$ لأنّ العدد π ليس محصورًا بين 1 و 3.

ولنا $1 \notin I$ و $3 \notin I$: طرفا مجال مفتوح لا ينتميان إلى ذلك المجال.

مثال 2: المجموعة $J = \{ x \in \mathbb{R} ; -\pi < x < 1 \}$ هي المجال المفتوح $]-\pi ; 1[$

لنا $\frac{1}{3} \in J$ لأنّ $-\pi < \frac{1}{3} < 1$ و $-\sqrt{2} \in J$ لأنّ $-\pi < -\sqrt{2} < 1$

بينما $\sqrt{2} \notin J$ لأنّ العدد $\sqrt{2} > 1$ ليس محصورًا بين $-\pi$ و1.

ج) نعتبر $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ بحيث $a < b$.

- المجموعة $I = \{ x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b \}$

تسمّى مجالاً نصف مغلقًا على اليمين (أو نصف مفتوحًا على اليسار) طرفاه a و b.

نرمز لهذا المجال بِـ $] a ; b]$ و نمثّله على المستقيم العددي كما يلي:

مثال: المجموعة $I = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}$ هي المجال النصف مغلق على اليمين $\left] \frac{1}{2}; 2 \right]$

لنا $\sqrt{2} \in I$ لأنّ $\frac{1}{2} < \sqrt{2} \leq 2$ و $\frac{1}{2} \notin I$ و $2 \in I$

- المجموعة $I = \{ x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b \}$

تسمّى مجالاً نصف مغلقًا على اليسار (أو نصف مفتوحًا على اليمين) طرفاه a و b.

نرمز لهذا المجال بِـ $[a ; b [$ و نمثّله على المستقيم العددي كما يلي:

مثال: المجموعة $J = \{ x \in \mathbb{R}; -2 \leq x < 1 \}$ هي المجال النصف مغلق على اليسار $[-2;1[$

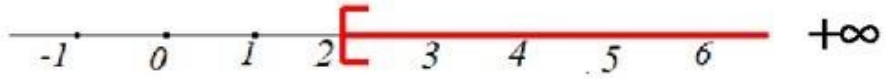
لنا $-2 \in J$ و $1 \notin J$ و $0,9999 \in I$ و $-2,1 \notin I$

2. المجالات غير المحدودة:

أ ❁ لنبدأ بهذا المثال: ليكن $I=\{\, x\in\mathbb{R}\ ;\ x\geq 2\,\}$

I مجموعة تحتوي على العدد 2 وكلّ الأعداد الأكبر من 2

من البديهي أن يكون تمثيل المجموعة I على المستقيم العددي كما يلي:



و من الواضح أنّ تمثيل المجموعة I محدود على اليسار بالعدد 2 بينما ليس له حدّ على اليمين فهو يمتدّ إلى اللانهاية الموجبة $+\infty$.

المجموعة I تسمّى مجالاً مغلقًا غير محدود على اليمين طرفه 2 و نرمز لها بِـ $[\, 2\ ,\ +\infty\,[$.

لنا $2\in I$ لأنّ $2\geq 2$ و $\pi\in I$ لأنّ $\pi\geq 2$

و $99999^{9999999999}\in I$ بينما $1{,}99999\notin I$ لأنّ $1{,}99999<2$

❁ نعتبر $a\in\mathbb{R}$.

المجموعة $I=\{\, x\in\mathbb{R}\ ;\ x\geq a\,\}$ تسمّى مجالاً مغلقًا غير محدود على اليمين طرفه a و نرمز لها بِـ $[\, a\ ,\ +\infty\,[$.

❁ المجموعة $J=\{\, x\in\mathbb{R}\ ;\ x>a\,\}$ تسمّى مجالاً مفتوحًا غير محدود على اليمين طرفه a و نرمز لها بِـ $]\, a\ ,\ +\infty\,[$.

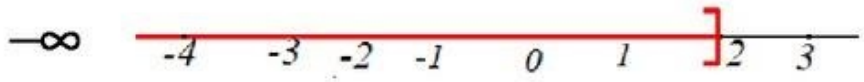
مثال: $J=\{\, x\in\mathbb{R}\ ;\ x>1\,\}=]\, 1\ ,\ +\infty\,[$

لنا $1{,}0001\in J$ و $1\notin J$ و $99999^{9999999999}\in J$

ب ❁ لنبدأ بهذا المثال: ليكن $I=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x\leq 2\}$

I مجموعة تحتوي على العدد 2 وكلّ الأعداد الأصغر من 2

من البديهي أن يكون تمثيل المجموعة I على المستقيم العددي كما يلي:



و من الواضح أنّ تمثيل المجموعة I محدود على اليمين بالعدد 2 بينما ليس له حدّ على اليسار فهو يمتدّ إلى اللانهاية السالبة $-\infty$.

المجموعة I تسمّى مجالاً مغلقًا غير محدود على اليسار طرفه 2 ونرمز لها بِـ $]-\infty\ ,\ 2\ ]$.

لنا $2\in I$ لأنّ $2\leq 2$ و $-\pi\in I$ لأنّ $-\pi\leq 2$

و $-99999^{9999999999999}\in I$ بينما $2{,}000001\notin I$ لأنّ $2{,}000001>2$

❁ نعتبر $a\in\mathbb{R}$.

المجموعة $I=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x\leq a\}$ تسمّى مجالاً مغلقًا غير محدود على اليسار طرفه a و نرمز لها بِـ $]-\infty\ ,\ a\ ]$.

❁ المجموعة $J=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x<a\}$ تسمّى مجالاً مفتوحًا غير محدود على اليسارطرفه a و نرمز لها بِـ $]-\infty\ ,\ a\ [$.

مثال: $J=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x<1\}=]-\infty\ ,\ 1\ [$

لنا $0{,}99999\in J$ و $1\notin J$ و $-99999^{9999999999}\in J$