الدّرس5: التّرتيب و المقارنة في مجموعة الأعداد الحقيقيّة

ملخّص الدرس

❖ **مقارنة عددين حقيقيين باستعمال الفارق بينهما:**

- a و b عددان حقيقيّان
- إذا كان $a-b\leq 0$ يعني $a\leq b$
- إذا كان $a-b>0$ يعني $a>b$

مثال:

① $x-y=-3$ يعني $x-y<0$ إذن $x<y$

② $a-b=2\sqrt{2}$ يعني $a-b>0$ إذن $a>b$

③ $c-d=x^2$

بما أن $x^2\in\mathbb{R}_+$ يعني $c-d\geq 0$ إذن $c\geq d$

❖ **التّرتيب و الجمع في المجموعة $\mathbb{R}$**

- x و y و z ثلاثة أعداد حقيقيّة

$(x\leq y)$ يعني $(x+z\leq y+z)$

ملاحظة: لا يتغيّر اتّجاه علامة المقارنة عند إضافة نفس العدد الحقيقي (موجب أو سالب) للطرفين.

مثال:

① $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ يعني $\sqrt{2}+\pi<\sqrt{3}+\pi$

② $-5<-4$ يعني $-5+\sqrt{2}<-4+\sqrt{2}$

③ مقارنة: $-4\sqrt{2}$ و $-\sqrt{3}-\sqrt{18}$

لدينا $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ و $-4\sqrt{2}=-\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

و بما أنّ $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$

يعني $-\sqrt{3}-3\sqrt{2}<-\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

إذن $-\sqrt{3}-\sqrt{18}<-4\sqrt{2}$

- x و y و z أعداد حقيقيّة

$x\leq y$ و $z\leq t$

$x+z\leq y+t$

مثال: ① $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ و $-\sqrt{5}<-2$

يعني $\sqrt{2}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-2$

Tunitests.tn

② $\pi < \frac{22}{7}$

$\sqrt{5} < 3$ و $\begin{cases} \frac{22}{7} = 3,1428... \\ \pi = 3,1415... \end{cases}$

يعني $\pi + \sqrt{5} < \frac{22}{7} + 3$

③ إذا كان $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ y \leq -2 \text{ و} \end{cases}$ نضيف الطرف للطرف نحصل على $x - y + y \leq 2 + (-2)$

يعني $x \leq 0$ $(x \in \mathbb{R}_-)$

❖ التّرتيب و الضّرب في المجموعة $\mathbb{R}$.

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقيّة

- $a \leq b$ و $c \in \mathbb{R}_+^*$ يعني $a \times c < b \times c$
- $a > b$ و $c \in \mathbb{R}_-^*$ يعني $a \times c < b \times c$

مثال: ① $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ و $2 \in \mathbb{R}_+$ يعني $2\sqrt{2} < 2\sqrt{3}$

② مقارنة $5\sqrt{2}$ و $\sqrt{27} + \sqrt{8}$

لدينا $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$5\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

بما أنّ $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ و $3 \in \mathbb{R}_+$

يعني $3\sqrt{2} < 3\sqrt{3}$

و منه $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} < 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

إذن $5\sqrt{2} < \sqrt{27} + \sqrt{8}$

③ مقارنة $-\sqrt{\frac{80}{9}}$ و $\frac{-4\sqrt{7}}{3}$

لدينا $-\sqrt{\frac{80}{9}} = \frac{-4}{3}\sqrt{5}$

و بما أنّ $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ و $-\frac{4}{3} \in \mathbb{R}_-$

يعني $-\frac{4}{3}\sqrt{7} < -\frac{4}{3}\sqrt{5}$

إذن $-\frac{4}{3}\sqrt{7} < -\sqrt{\frac{80}{9}}$

Tunitests.tn

❖ **مقارنة مقلوب عددين حقيقيّين مخالفين لصفر.**

a و b عددان حقيقيان مخالفان لصفر لهما نفس العلامة:

$a<b$ يعني $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

$a\geq b$ يعني $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}$

مثال: ① مقارنة $\frac{1}{-1-\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{-2-\pi}$

لدينا: $1<2$ و $\sqrt{2}<\pi$ يعني $1+\sqrt{2}<2+\pi$

و منه $-(2+\pi)<-\left(1+\sqrt{2}\right)$

إذن $\frac{1}{-2-\pi}>\frac{-1}{-1-\sqrt{2}}$

② مقارنة $\frac{-1}{1+\pi}$ و $\frac{-1}{6}$

لدينا $6=2+4$

و $2>1$ $\quad 4<\pi$

يعني $2+4<1+\pi$

يعني $6<1+\pi$

و منه $\frac{1}{1+\pi}<\frac{1}{6}$

إذن $\frac{-1}{1+\pi}<\frac{-1}{6}$

❖ **مقارنة مربّعي عددين حقيقيّين**

• x و y عددان حقيقيّان موجبان

$x<y$ يعني $x^2<y^2$

• x و y عددان حقيقيّان سالبان

$x\geq y$ يعني $x^2\leq y^2$

مثال①: مقارنة $\sqrt{2}$ و $\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$ و $\left(\sqrt{2}\right)^2=2=\frac{8}{4}$

يعني $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2<\left(\sqrt{2}\right)^2$

و العددان موجبان إذن $\frac{\sqrt{7}}{2}<\sqrt{2}$

Tunitests.tn

② مقارنة $-4\sqrt{3}$ و $-5\sqrt{2}$

$\left(-4\sqrt{3}\right)^2 = 48$ و $\left(-5\sqrt{2}\right)^2 = 50$

يعني $\left(-5\sqrt{2}\right)^2 \rangle \left(-4\sqrt{3}\right)^2$

و العددان سالبان

إذن $-5\sqrt{2} \langle -4\sqrt{3}$

③ مقارنة $-3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ و $-2\sqrt{7}+1$

لدينا $\left(-3\sqrt{3}\right)^2 = 27$ و $\left(-2\sqrt{7}\right)^2 = 28$

يعني $\left(-2\sqrt{7}\right)^2 \rangle \left(-3\sqrt{3}\right)^2$

والعددان سالبان

يعني $-2\sqrt{7} \langle -3\sqrt{3}$

و بما أنّ $1 \langle \sqrt{2}$

إذن $-2\sqrt{7}+1 \langle -3\sqrt{3}+\sqrt{2}$

• x و y عددان حقيقيّان موجبان

$x \leq y$ يعني $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

مثال:

① $12 \langle 18$ يعني $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ و منه $2\sqrt{3} \rangle 3\sqrt{2}$

② $49 > 50$ يعني $\sqrt{49} \rangle \sqrt{50}$ إذن $7 \rangle 5\sqrt{2}$

Tunitests.tn

تمارين للدّعم

تمرين عدد 1:

ليكن a وb عددان حقيقيّان حيث $a - b = -\sqrt{2}$ والعبارتين x و y حيث :

$y = (5\sqrt{2} - b) - \sqrt{32}$; $x = \sqrt{8} - \left(a + \sqrt{18}\right)$

1) استنتج مقارنة بين a وb .

2) أ) اختصر العبارتين x و y.

ب)قارن بين x و y .

تمرين عدد 2:

ليكن x و y عددان حقيقيّان حيث $x \leq y$.

بيّن أنّ : $\left|x-y-\sqrt{2}\right|-\left|y-x\right|+\sqrt{2}=\sqrt{8}$

تمرين عدد 3:

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a \geq b$

1) قارن بين x و y حيث : $\begin{cases} x=\frac{2}{5}a+4b \\ y=5b-\frac{3}{5}a \end{cases}$

2) استنتج مقارنة بين $x+\pi-3\sqrt{2}$ و $y+\pi-\sqrt{18}$

تمرين عدد 4:

نعتبر العددين الحقيقيين a و b حيث $a<b$ و a عدد سالب

قارن بين x و y في الحالات التّالية:

أ- $x=a-2\sqrt{2}$ و $y=b-\sqrt{18}$

ب- $x=\left(2\sqrt{3}+a\right)-b$ و $y=\sqrt{27}-b$

ج- $x=-2\pi+a$ و $y=-(\pi+3)+b$

تمرين عدد 5:

نعتبر الأعداد الحقيقيّة x و y و z حيث :

$x-y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و z- $x=\frac{-\sqrt{18}}{2}$

1) بيّن أنّ : $z-y=-\sqrt{2}$

2) استنتج مقارنة بين y و z.

3) قارن بين $-y+\sqrt{8}-\pi$ و $-z-\pi+2\sqrt{2}$

تمرين عدد 6:

نعتبر العبارتين a و b حيث $b=\sqrt{8}-\sqrt{48}$; $a=2\sqrt{2}-\sqrt{27}$

1) اختصر العبارتين a و b

2) بيّن أنّ $a>b$

3) استنتج مقارنة بين $a-2\sqrt{20}$ و $b-\sqrt{2}\times\sqrt{8}\times\sqrt{5}$

تمرين عدد 7:

نعتبر العبارة A التالية حيث x و y عددان حقيقيّان :

$A=-\sqrt{27}-\left(x-3\sqrt{2}\right)-\left[\left(\sqrt{32}-y\right)-\sqrt{12}\right]$

) بيّن أنّ : $A=-x+y-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

) استنتج مقارنة بين x و y إذا كان : $A=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

Tunitests.tn

تمرين عدد 8:

1)ليكن x و y عددان حقيقيّان حيث $-y+x+\sqrt{2}<-\sqrt{3}$ و $y-\sqrt{2}<0$

بيّن أنّ العدد الحقيقي x سالب قطعا

2)ليكن x و y عددان حقيقيّان حيث:

$x-\sqrt{2}\leq +2$ و $\sqrt{2}-y\leq -2$

بيّن أنّ $x\leq y$

تمرين عدد 9:

نعتبر العددين الحقيقيين a و b حيث a<b

1)قارن بين : $-\sqrt{2}\,a+\sqrt{18}$ و $\frac{-2}{\sqrt{2}}b+2\sqrt{2}$

2) أ) بيّن أنّ : $3\,a-\sqrt{3}<3\,b-\sqrt{3}$

ب)استنتج مقارنة بين $\sqrt{3}\left(b-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $\sqrt{3}\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3)قارن بين :

أ) a و $\frac{2\,a+b}{3}$

ب) b و $\frac{2\,a+b}{3}$

4)استنتج ترتيبا للأعداد a و b و $\frac{2\,a+b}{3}$

تمرين عدد 10:

قارن بين العددين الحقيقيّن a و b في الحالات التّالية:

أ) $a=-2$ و $b=-3+\sqrt{3}$

ب) $a=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ و $b=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

ج) $a=2\sqrt{5}$ و $b=2\sqrt{3}$

د) $a=2+\sqrt{11}$ و $b=-3+\sqrt{7}$

هـ) $a=\frac{-2}{\sqrt{5}}$ و $b=\frac{-2}{\sqrt{7}}$

و) $a=5\sqrt{3}$ و $b=4\sqrt{5}$

ك) $a=-3$ و $b=-4+\sqrt{2}$

ل) $a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ و $b=\frac{2}{\sqrt{5}}$

Tunitests.tn

1) أ) قارن بين العددين $3\sqrt{2}$ و $4\sqrt{3}$

ب)استنتج مقارنة بين $5\sqrt{2}-1$ و $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$

2) قارن بين أ) $\frac{2}{5\sqrt{2}-1}$ و $\frac{2}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

ب) $\frac{1-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-1}$ و $\frac{1-\sqrt{2}}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

تمرين عدد 12:

أكتب العبارات التّالية في أبسط صورة إذا كان العدد الحقيقي x <-1

$a = -|x| + x$ $\quad b = -2x - |2x+2|$ $\quad c = |x-1| - |2(-1-x)|$

تمرين عدد 13:

نعتبر العددين الحقيقيّين x و y حيث :

$x = \sqrt{245}$ و $y = 2\sqrt{61}$

1) أ) بيّن أنّ: $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

ب)احسب $x^2 - y^2$ ثمّ استنتج مقارنة بين x و y

2)استنتج مقلوب $7\sqrt{5} - \sqrt{244}$

تمرين عدد 14:

ليكن a و b عددان حقيقيّان حيث $a > b$

1)أ) قارن بين x و y حيث $y = \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}a$ و $x = \frac{7}{6}a - \frac{2}{3}b$

ب)استنتج مقارنة بين : $-\sqrt{3}x + 1$ و $-\sqrt{3}y + \frac{5}{4}$

2)أ) قارن بين 7 و $4\sqrt{3}$

ب)استنتج مقارنة بين 14 و $4\sqrt{3}+7$

ج) بيّن أنّ : $\frac{1}{4(\sqrt{3}-1)} > \frac{1}{3}$

3)اختصر العبارة E التالية: $E = \sqrt{27} - |4\sqrt{3}-7| - |-4\sqrt{3}-7|$

تمرين عدد 15:

نعتبر العددين الحقيقيين a و b حيث : $b = \sqrt{8} \times (1+\sqrt{2}) - 3\sqrt{5}$; $a = 2\sqrt{18} - \sqrt{3} \times \sqrt{15}$

1)أ) اختصر العبارتين a و b .

Tunitests.tn

ب)بيّن أنّ : $a - b = 4\sqrt{2} - 4$

ج) استنتج مقارنة بين a و b .

2)قارن بين: $\sqrt{2}\times\left(\frac{1-a}{a}\right)$ و $\frac{\sqrt{2}}{b}-1$

تمرين عدد 16:

نعتبر العبارتين A و B حيث: $B = 6\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$; $A = \sqrt{600}-5\sqrt{6}-\sqrt{24}$

1) بيّن أنّ : $A = 3\sqrt{6}$ و $B = 5\sqrt{2}$

2) أ) احسب $(A-B)(A+B)$ ثمّ استنتج أنّ: $A-B\in\mathbb{R}_+$

ب)استنتج مقارنة بين A و B .

3) قارن بين : $\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{2}A+1}$ و $\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{2}(B-1)}$

تمرين عدد 17:

ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا

1) قارن بين $\sqrt{a}$ و $\sqrt{a+1}$

2)استنتج مقارنة بين $2\sqrt{a}$ و $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$

3)بين أنّ : $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\le\frac{\sqrt{a}}{2a}$

تمرين عدد 18:

1) نعتبر العددين الحقيقيين a و b حيث :

$b = \frac{\sqrt{35}\times\sqrt{24}}{\sqrt{21}\times\sqrt{10}}$ $a = 2\sqrt{27}-2\sqrt{12}-\sqrt{3}$

أ)قارن بين a و b

ب)استنتج مقارنة لـ 3 و $2\sqrt{3}$

2)أ)اختصر العبارتين x و y حيث : $x = |3-2\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|$ $y = -\sqrt{108}+\sqrt{4}+\sqrt{75}$

ب)قارن بين x و y.

ج)استنتج مقارنة لـ $\frac{1}{x+y}$ و $\frac{1}{2x}$

تمرين عدد 19:

ليكن x و y عددان حقيقيّان حيث $1<y$ x

بين أنّ: $|y(x-1)|-y|x-y|+|y^2-y|=0$

Tunitests.tn

تمارين الإختيار من متعدد:

اختر الجواب الصّحيح من الأجوبة المقترحة

1) x عدد حقيقي موجب حيث $x+1<2$ يعني $x-1$:

☐ عدد سالب ☐ عدد موجب ☐ يساوي صفر

2) a و b عددان حقيقيّان موجبان حيث $a<b$ يعني:

☐ $-\sqrt{2}\,a-1<-\sqrt{2}\,b-1$ ☐ $\frac{1}{-\sqrt{2}\,a-1}<\frac{1}{-\sqrt{2}\,b-1}$ ☐ $\frac{1}{a-1}>\frac{1}{-\sqrt{2}\,b-1}$

3) x و y عددان حقيقيّان حيث $y=x^2$ يعني:

☐ $y>0$ ☐ $y\geq 0$ ☐ $y=0$

4) x عدد حقيقي حيث $x\geq 1$ يعني :

☐ $2x+3\geq 6$ ☐ $2x+3\geq 5$ ☐ $2x+3>5$

5) x و y عددان حقيقيّان حيث $x\geq y$ يعني:

☐ $\frac{x}{\sqrt{2}}\geq\frac{y}{\sqrt{2}}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{x}\geq\frac{\sqrt{2}}{y}$ ☐ $\frac{x}{\sqrt{2}}>\frac{y}{\sqrt{2}}$

6) a و b عددان حقيقيّان حيث $a<b$ يعني :

☐ $(1-\sqrt{3})\,a<(1-\sqrt{3})\,b$ ☐ $(1-\sqrt{3})\,a\leq(1-\sqrt{3})\,b$ ☐ $(1-\sqrt{3})\,a>(1-\sqrt{3})\,b$

7) a و b عددان حقيقيّان حيث $a<b$ يعني:

☐ $b<\frac{a+b}{2}$ ☐ $a-b<a+b$ ☐ $a<\frac{a+b}{2}$

8) x و y عددان حقيقيّان حيث $x\leq y$ يعني :

☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}x-1\geq\frac{-1}{\sqrt{2}}y-\sqrt{3}$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}x-1\leq\frac{-1}{\sqrt{2}}y-\sqrt{3}$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}x-1>\frac{-1}{\sqrt{2}}y-\sqrt{3}$

9) a و b عددان حقيقيان مخالفان لصفر حيث $a<b$ يعني:

☐ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ☐ $a^2<b^2$ ☐ $-a+b>0$

10) x عدد حقيقي حيث $x<\sqrt{2}$ يعني:

☐ $x^2>2$ ☐ $\frac{1}{x}>\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\sqrt{2}-x>0$

11) $x=\frac{1}{1-\sqrt{3}}$ يعني :

☐ $x<-1$ ☐ $x>-1$ ☐ $x\geq -1$

12)

☐ $2-\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\frac{-\sqrt{3}}{3}+1$ ☐ $2-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq\frac{-\sqrt{3}}{3}+1$ ☐ $2-\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{-\sqrt{3}}{3}+1$

Tunitests.tn