الفهرس

الأعـــداد الكسريّـــة

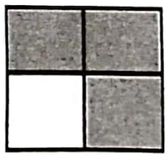
مقدمـــة

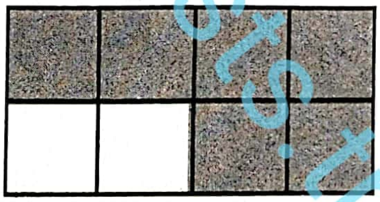
1) ارسم قطعة مستقيم بطول مناسب وحدّد عليها جزءا يدلّ على ربعها ثم حدّد عليها جزءا يدلّ على كلّ من الأعداد الكسرية التالية: $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

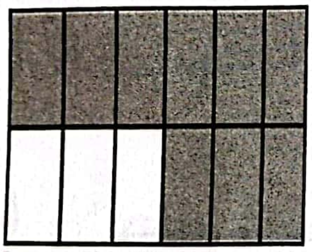
لاحظ أنّ العدد الكسريّ $\frac{3}{4}$ مثلا يعني أنّنا جزّأنا وحدة معيّنة (قطعة مستقيم مثلا) إلى أربعة أجزاء متقايسة الطّول وأنّ العدد الكسريّ $\frac{3}{4}$ هو ثلاثة من هذه الأجزاء .

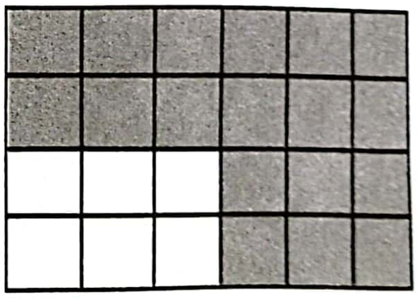
مقام العدد الكسرزيّ يدلّ على عدد الأجزاء التي قسمت إليها الوحدة. و بسط العدد الكسري يدلّ على عدد الأجزاء المطلوبة من بين هذه الأجزاء التي انقسمت إليها الوحدة.

2) اكتب العدد الكسري الدّال على الجزء المظلّل في كلّ من الأشكال التّـالية :









•(هذه منطلقات لدراسة الأعداد الكسريّة في السّنة الخامسة)

تنتج من بين الأعداد الكسريّة الدّالة على الأجزاء المظلّلة أن $\frac{3}{4}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{9}{12}$ ، $\frac{18}{24}$ متساوية.

دد الكسريّ $\frac{3}{4}$ يمكن كتابته على صور مختلفة منها : $\frac{6}{8}$ ، $\frac{9}{12}$ ، $\frac{18}{24}$ ، $\frac{12}{16}$ ....

ذه كتابات مختلفة للعدد الكسريّ $\frac{3}{4}$ و نكتب $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{18}{24}$

قاعدة :

بصفة عامّة:

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإنّ أ × د = ب × ج حيث ب مخالف للصّفر ود مخالف للصّفر.

وكذلك:

إذا كان أ × د = ب × ج فإنّ $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$.

ملاحظات:

- تؤول جميع الكتابات المختلفة لنفس العدد الكسري عند كتابتها في أبسط صورة إلى صورة وحيدة.
- نتحصّل على كتابات مختلفة لعدد كسري إذا ضربنا بسطه ومقامه في نفس العدد المخالف للصّفر.
- نتحصّل على كتابات مختلفة لعدد كسري إذا قسمنا بسطه ومقامه على قاسم مشترك لهما.
- ليكن أ وب عددين صحيحين طبيعيين حيث ب مخالف للصّفر. إذا كان أ وب أوّليين فيما بينهما نقول إنّ $\frac{أ}{ب}$ هي كتابة مختصرة إلى أقصى حدّ.
- المقام المشترك الأصغر لعددين كسريين مختزلين إلى أقصى حدّ هو المضاعف المشترك الأصغر لمقاميهما.
- كلّ عدد كسريّ هو مجموع عدد صحيح طبيعي وعدد كسري أصغر من 1 (مثال $\frac{3}{4} = 0+ \frac{3}{4}$ ، $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ ، $\frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$).
- مجموعة الأعداد الصّحيحة الطّبيعيّة تشكّل مجموعة جزئيّة من مجموعة الأعداد الكسريّة.
- رياضيّا نرمز لمجموعة الأعداد الكسريّة بحرف Q (في مستوى المرحلة الثّانية من التّعليم الأساسي وفي التّعليم الثّانوي) ونرمز كذلك بحرف IN لمجموعة الأعداد الصّحيحة الطّبيعية ونلاحظ أن $IN \subset Q$.
- ومن هنا نفهم كيف أنّ بعض المعادلات الّتي ليس لها حلول في المجموعة IN يصبح لها حلّ أو أكثر في مجموعة Q (مثال: 3 س ـ 7 = 0) 3 س = 7 ومنه س = $\frac{7}{3}$.

* ملاحظة: منطلق دراسة الأعداد الكسريّة في السّنة السّادسة المعادلات التي ليس لها حلّ في مجمو

الأعداد الصّحيحة الطّبيعيّة.

الأعـــداد الـعـشـريـة

قــاعــدة:

- يكون العدد الكسريّ عشريًا إذا وجدنا له كتابة في صيغة $\frac{1}{10^{ن}}$

- يكون العدد الكسريّ عشريًا إذا كانت القواسم الأوّليّة لمقام إحدى كتاباته الكسريّة 2 أو 5 أي أنّ مق

يكتب في شكل $5^{س} \times 2^{د}$ (وفي مستوى السّنة السّادسة إذا كان مقامه قاسما لـ 10 أو 100 أو 1000...)

مثال: $\frac{435}{232}$ ، $\frac{17}{125}$

العدد الكسريّ $\frac{82}{3}$ لا يمثّل عددا عشريًا.

ملاحظـــــات:

رياضيًا نرمز لمجموعة الأعداد العشريّة بالحرف ID

كلّ عدد صحيح طبيعيّ هو عدد عشريّ وكلّ عدد عشريّ هو عدد كسريّ، إذا فمجموعة الأعداد العشريّة

محتواة في مجموعة الأعداد الكسريّة.

ولنا : $\mathbb{N} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

العمليّات في مجموعة الأعداد الكسريّة

1- الجمع في المجموعة «كـــا»

مهما كانت الأعداد الكسريّة $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ ∋ كـــا

$$\frac{أ}{ب}+\frac{ج}{د}=\frac{أ \times د}{ب \times د}+\frac{ج \times ب}{د \times ب}=\frac{أ د + ج ب}{ب د} \in كـــا$$

مثال $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{4\times2}{4\times3}+\frac{3\times5}{3\times4}=\frac{8+15}{12} \in$ كـــا

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{3}{12}+\frac{15}{12}=\frac{23}{12} \in كـــا$$

الاستنتاج: كلّما جمعنا عددين كسريين نجد عددا كسريّا ينتمي إلى«كـــا» فنقول إنّ الجمع قانون تركيب داخليّ في «كـــا».

خاصيّات الجمع:

- التّبديليّة

مهما كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ ∋ «كـــا» فإنّ:

$\frac{أ}{ب}+\frac{ج}{د}=\frac{ج}{د}+\frac{أ}{ب}$ نقول إن الجمع تبديلي في كـــا

مثال: $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$

- التّجميعيّة

مهما كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ ، $\frac{هـ}{و}$ ∋ «كـــا» فإنّ

$$\left.\begin{array}{l}\frac{أ}{ب}+\frac{ج}{د}+\frac{هـ}{و}=\left(\frac{أ}{ب}+\frac{ج}{د}\right)+\frac{هـ}{و}\\ =\frac{أ}{ب}+\left(\frac{ج}{د}+\frac{هـ}{و}\right)\\ =\left(\frac{أ}{ب}+\frac{هـ}{و}\right)+\frac{ج}{د}\end{array}\right\}$$

فالجمع تجميعيّ في كـــا

$$(\frac{2}{12}+\frac{3}{12})+\frac{7}{12}=$$

$$\frac{2}{12}+(\frac{3}{12}+\frac{7}{12})=$$

$$\frac{3}{12}+(\frac{2}{12}+\frac{7}{12})=$$

العنصر المحايد

مهما كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \in$ «كـــا» يوجد عدد كسريّ معدوم $\frac{0}{\text{ب}}$

بحيث: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}+\frac{0}{\text{ب}}=\frac{\text{أ}+0}{\text{ب}}=\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

نقول إنّ $\frac{0}{\text{ب}}=\frac{0}{1}=0$ وهو عنصر حياد بالنسبة إلى الجمع في «كــا»

2) الطّرح في«كــا»

نفرض $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ج}}{\text{د}} \in$ «كــا» بحيث $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \le \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ ونبحث عن عدد كسريّ «س» يحقّق $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{س} + \frac{\text{ج}}{\text{د}}$

$$\text{س} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب د}} - \frac{\text{ج ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ د} - \text{ج ب}}{\text{د ب}}$$

ملاحظة: الطّرح في كــا غير تبديلي،غير تجميعي وليس له عنصر حياد في كــا

3)الضّرب في كــا:

مهما كان، $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ج}}{\text{د}} \in$ كـــا

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\times\frac{\text{ج}}{\text{د}}=\frac{\text{أ}\times\text{ج}}{\text{ب}\times\text{د}} \in \text{كـــا}$$

الضّرب قانون تركيب داخليّ في كــا

خاصّيات الضّرب:

* التّبديلية: مهما كان، $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ج}}{\text{د}} \in$ كـــا فإنّ

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\times\frac{\text{ج}}{\text{د}}=\frac{\text{ج}}{\text{د}}\times\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

مثال: $\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}$

* التجميعيّة: مهما كان= $\frac{أ}{ب}$ + $\frac{ج}{د}$ + $\frac{هـ}{و}$ $\in$ كـــا

فإن = $\frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د} \times \frac{هـ}{و}$ مثال: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$

= $(\frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د}) \times \frac{هـ}{و}$ = : $(\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}) \times \frac{4}{3}$

= $\frac{أ}{ب} \times (\frac{ج}{د} \times \frac{هـ}{و})$ = $\frac{3}{5} \times (\frac{2}{7} \times \frac{4}{3})$

= $(\frac{أ}{ب} \times \frac{هـ}{و}) \times \frac{ج}{د}$ = $(\frac{3}{5} \times \frac{4}{3}) \times \frac{2}{7}$

*<u>العنصر المحايد:</u>

الضّرب في كـا عنصر حياد وهو 1 = $\frac{1}{1}$ $\in$ كـــا

ن = $\frac{أ}{ب} \times \frac{1}{1} = \frac{أ \times 1}{ب \times 1} = \frac{أ}{ب}$

$\frac{1}{1} \times \frac{أ}{ب} = \frac{أ}{ب}$ أيضا.

1) طـا جزء من كـا:

. كلّ عدد طبيعيّ أ ∈ طـا يكتب أ = $\frac{\text{أ}}{1}$ ∈ كـا

. كلّ عدد طبيعيّ هو عدد كسريّ

. طـا جزء من كـا أي طـا ⊂ كـا

2) المجموعة «عـا جزء من كـا:

. العدد العشريّ هو كلّ عدد كسري نجد له كتابة في صيغة $\frac{\text{أ}}{10^{\text{ن}}}$ مثال $\frac{1}{10}$، $\frac{5}{100}$، $\frac{165}{1000}$ الخ

حيث أ ∈ طـا و ن ∈ طـا

مثال: $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000}$ عدد عشريّ

لأنّ $\frac{125 \times 3}{125 \times 8} = \frac{375}{1000}$

$\frac{7}{125} = \frac{56}{10000}$ عدد عشري

$\frac{15}{16} = \frac{9375}{10000}$ عدد عشري

و العدد الكسريّ $\frac{2}{3}$ غير عشريّ لماذا؟

التّحليل: لو فرضنا وجود كتابة $\frac{\text{أ}}{10^{\text{ن}}} = \frac{2}{3}$ نستنتج

أنّ $3 \times \text{أ} = 2 \times 10^{\text{ن}}$

$3 \times \text{أ} = 2 \times 2^{\text{ن}} \times 5^{\text{ن}}$ لا تحتوي الكتابة الأخيرة على العامل 3 فالمساواة إذن

مستحيلة ممّا يدلّ على أنّ العدد الكسريّ $\frac{2}{3}$ غير عشريّ.

* المجموعة كـا تحتوي على المجموعة عـا

* كلّ عدد طبيعي هو عدد عشري أ = $\frac{\text{أ}}{1}$ ∈ عـا

إذن طـا ⊂ عـا ⊂ كـا

1) طـا جزء من كـا:

. كلّ عدد طبيعيّ أ ∈ طـا يكتب أ = $\frac{\text{أ}}{1}$ ∈ كـا

. كلّ عدد طبيعيّ هو عدد كسريّ

. طـا جزء من كـا أي طـا ⊂ كـا

2) المجموعة «عـا جزء من كـا:

. العدد العشريّ هو كلّ عدد كسري نجد له كتابة في صيغة $\frac{\text{أ}}{10^{\text{ن}}}$ مثال $\frac{1}{10}$، $\frac{5}{100}$، $\frac{165}{1000}$ الخ

حيث أ ∈ طـا ون ∈ طـا

مثال: $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000}$ عدد عشريّ

لأنّ $\frac{125 \times 3}{125 \times 8} = \frac{375}{1000}$

$\frac{7}{125} = \frac{56}{10000}$ عدد عشري

$\frac{15}{16} = \frac{9375}{10000}$ عدد عشري

و العدد الكسريّ $\frac{2}{3}$ غير عشريّ لماذا؟

التّحليل: لو فرضنا وجود كتابة $\frac{\text{أ}}{10^{\text{ن}}} = \frac{2}{3}$ نستنتج

أنّ $3 \times \text{أ} = 2 \times 10^{\text{ن}}$

$3 \times \text{أ} = 2 \times 2^{\text{ن}} \times 5^{\text{ن}}$ لا تحتوي الكتابة الأخيرة على العامل 3 فالمساواة إذن

مستحيلة ممّا يدلّ على أنّ العدد الكسريّ $\frac{2}{3}$ غير عشريّ.

* المجموعة كـا تحتوي على المجموعة عـا

* كلّ عدد طبيعي هو عدد عشري أ = $\frac{\text{أ}}{1}$ ∈ عـا

إذن طـا ⊂ عـا ⊂ كـا

السّــلّــم

لرسم الخرائط والتّصاميم المختلفة لا يمكن تمثيلها بأطوالها الحقيقيّة بل ترسم حسب سلّم معيّن للقيس وهو حالة خاصة أيضا من التّناسب فالسلّم هو نسبة خاصّة بسطها 1

السّلّم $\frac{1}{1000}$ هو نسبة بسطها 1 ومقامها 1000

السّلّم $\frac{1}{50000}$ هو نسبة بسطها 1 ومقامها 50000

مثال (1) المسافة بين تونس وباجة على خريطة مرسومة تساوي 10 صم

*أحدّد بالكم المسافة الحقيقيّة بين المدينتين.

الحلّ: $\frac{1}{1000000} = \frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$

يعني 1 صم على الخريطة يمثّل 1000000 صم أو 10 كم في الواقع.

إذن $\frac{1}{1000000} = \frac{\text{10 صم}}{\text{المسافة الحقيقيّة}}$

المسافة الحقيقية

1 ⟵ 10 صم

100000 ⟵ ؟

سافة الحقيقية = 10 صم × 1000000 = 10000000 صم = 100 كم

حث عن السلّم:

هو: $\frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}} = \frac{\text{10 صم}}{\text{100 كم}} = \frac{\cancel{10}\text{صم}}{100000\cancel{0}} = \frac{1}{1000000}$

مثال (2) البحث عن الأبعاد على الخريطة

أراد مهندس معماريّ رسم قطعة أرض مستطيلة الشكل على التّصميم، بعدا قطعة الأرض بالهم تباعا 800 و200 وذلك وفقا للسلّم $\frac{1}{1000000}$

ارسم التّصميم لقطعة الأرض.

الحلّ:

800 هم = 8000000 صم و200 هم = 2000000 صم

طول قطعة الأرض على التّصميم $\frac{8000000 \text{ صم } \times 1}{1000000}$ = 8 صم.

عرض قطعة الأرض على التّصميم

$\frac{2000000 \text{ صم } \times 1}{1000000}$ = 2 صم

تم إنجاز الرّسم.

النّسبة المائوية

تقدّم النّسبة كحالة خاصّة من التّناسب بالاعتماد على وضعيّة مستمدّة من واقع الحياة، فالنّسبة المائويّة هي نسبة خاصّة مقامها 100, فهي كسر بسطه مخالف للصفر ومقامه 100 مثال: 5 ٪ يعني $\frac{5}{100}$ يمكن أن يكون بسط العدد الكسريّ الدّال على النّسبة المائويّة عددا عشريًا، مثال: 12,5٪

مسألة (1):

اشترى السّيد حازم ثلاّجة سعرها الحقيقيّ بالدّينار 340, منحه البائع تخفيضا يقدّر بـ 10٪ أحدّد المقدار المالي الّذي دفعه الحريف في شراء الثّلاجة بعد التّخفيض.

الحلّ: $10\% = \frac{10}{100}$

1. الثّمن الحقيقيّ =100 ٪

2. مقدار التّخفيض =10 ٪

* الطّريقة الأولى

مقدار التّخفيض $\frac{10 \times 840}{100} = 84$ د

دفع الحريف بالدّ: 840 ـ 84 د = 756 د

* الطّريقة الثّانية:

الثّمن الحقيقيّ 100٪ أو $\frac{100}{100}$

قيمة التّخفيض 10 ٪ أو $\frac{10}{100}$

نسبة المبلغ المدفوع بعد التّخفيض

100٪ ـ 10٪ = 90٪ أو $\frac{100}{100} - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$

دفع الحريف في شراء الثّلاجة بالدّ

$\frac{90 \times 840}{100} = 756$ د

المسألة (2)

الثّمن الأصلي للثّلاّجة 840 د

قيمة التّخفيض 84 د

أحدّد النّسبة المائويّة للتّخفيض

* الطّريقة الأولى: قيمة التّخفيض 84 د بالنّسبة إلى 840 د

نسبة التّخفيض $\frac{84}{840} = \frac{1}{10}$ أو $\frac{10}{100}$ أو 10٪

* الطّريقة الثّانية: نوظّف التّناسب

المقدار المالي		النّسبة المائوية
الثّمن الأصلي: 840 د	تمثّل ←	100٪
مقدار التّخفيض: 84 د	تمثّل ←	؟ ٪

نسبة التّخفيض $\frac{100 \times 84}{840} = \frac{8400}{840} = 10$ أي 10 ٪